01. Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{5}{4}$

Solução: Alternativa A

Homens daltônicos: $P(H \cap D) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}05$

Mulheres daltônicas: $P(M \cap D) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0025$

Probabilidade de uma pessoa da população ser daltônica:

$$P(D) = P(H \cap D) + P(M \cap D) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0525$$

Probabilidade de ser mulher dado que a pessoa é daltônica:

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{1/2 \cdot 0{,}0025}{1/2 \cdot 0{,}0525} = \frac{1}{21}$$

02. Sejam α $\beta \in$ C tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a:

a) -2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

Solução: Alternativa B

Como $|\alpha| = |\beta| = 1$, então podemos escrever α e β na forma trigonométrica como:

$$\alpha = \cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1$$
$$\beta = \cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2$$

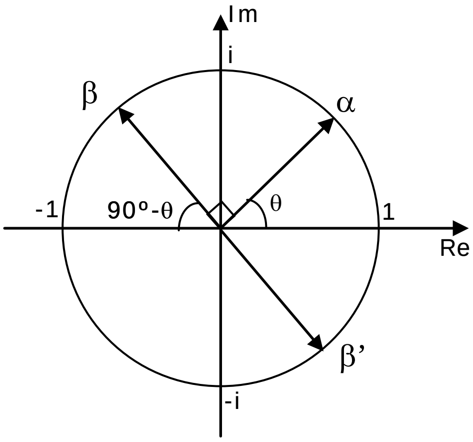
Como $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$, então:

$$|\alpha - \beta| = |\cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1 - (\cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)| = \sqrt{2} \Rightarrow$$
$$|(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + i(sen\theta_1 - sen\theta_2)|^2 = (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 + (sen\theta_1 - sen\theta_2)^2$$
$$= \cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2 - 2 \cdot (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) =$$
$$= 1 + 1 - 2 \cdot (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) = 2$$

Logo $(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2) = 0$, ou seja, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$

Daí segue que $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

Para determinado α e dois possíveis valores para β (onde β = - β') conforme ilustrado na figura a seguir no plano de Argnand-Gauss, temos a seguinte representação:



Da figura, temos:

$\alpha^2 + (\pm\beta)^2 = [\cos\theta + i \cdot sen\theta]^2 + [-\cos(90º-\theta) + i \cdot sen(90º-\theta)]^2$

Como $\cos(90º-\theta) = sen\theta$ e $sen(90º-\theta) = \cos\theta$, então:

$\alpha^2 + \beta^2 = [\cos\theta + i \cdot sen\theta]^2 + [-sen\theta + i \cdot \cos\theta]^2 =$

$(\cos^2\theta + 2isen\theta\cos\theta - sen^2\theta) + (sen^2\theta - 2isen\theta\cos\theta - \cos^2\theta) = 0$

03. Considere o sistema Ax = b, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } k \in R.$$

Solução: Alternativa A

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T – S é:

a) – 4 b) – 3 c) 0 d) 1 e) 4

Solução: Alternativa A

Escalonando o sistema em pauta:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 6z = 6 \\ -x + 3y + (k-3)z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ (k+4)y = 4 \\ y + kz = 1 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x + 3z - 2y = 1 \\ kz + y = 1 \\ (k+4)y = 4 \end{cases}$$

Da última equação temos que y = $\frac{4}{k+4}$.

Assim se k = -4 o sistema é impossível.

Para k= 0 a segunda e a terceira equações e equivalem e o sistema é possível e indeterminado.

Então, se k $\neq$ -4 e k $\neq$ 0, o sistema é possível e determinado.
Logo T=-4 e S=0 e T-S = -4

04. Sejam A e C matrizes n x n inversíveis que det (I + C^{-1}.A) = 1/3 e det A = 5. Sabendo-se que B = 3 (A^{-3} + C^{-1}), então o determinante de B é igual a

a) 3^n b) $2.\frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) 5 . 3^{n-1}

Solução: Alternativa D

$$\det B = \det\left[3\left(A^{-1} + C^{-1}\right)^T\right] = 3^n \det\left(A^{-1} + C^{-1}\right)$$

Para obtermos $\det\left(A^{-1} + C^{-1}\right)$ utilizamos a outra informação do enunciado:

$$\det\left(I + C^{-1}A\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(A^{-1}A + C^{-1}A\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left[\left(A^{-1} + C^{-1}\right)A\right] = \frac{1}{3}$$

$$\det\left(A^{-1} + C^{-1}\right).\det A = \frac{1}{3} \Rightarrow \det\left(A^{-1} \cdot C^{-1}\right) = \frac{1}{15}$$

Assim: $\det B = 3^n \cdot \frac{1}{15} = \frac{3^{n-1}}{5}$

2ª Solução:

det(I + C^{-1}.A) = 1/3
det(A^{-1}.A + C^{-1}.A) = 1/3
det((A^{-1}+ C^{-1}).A) = 1/3
det(A^{-1} + C^{-1}).detA = 1/3
(det(B/3)).5 = 1/3
detB$(1/3)^n$. 5 = 1/3
det B = $3^{(n-1)}$/ 5

05. Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de um menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 63, então o de maior grau tem grau igual a:

a) 30 b) 32 c) 34 d) 36 e) 38

Solução: Alternativa B

$$P(x) = P_1(x).P_2(x).P_3(x).P_4(x).P_5(x)$$

Seja ∂P_i o grau de P_i e $\partial P_i > \partial P_j$ para i>j, logo $\partial P_1 = 2.$

$$\partial P = \sum_{i=1}^{5} \partial P_i = 2 + 2R + 2R^2 + 2R^3 + 2R^4 = 62 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^4 + R^3 + R^2 + R = 30.(1)$$

R = 2 é solução de (1) e como R∈N, para $R \geq 3$ temos

$R^4 + R^3 + R^2 + R > 30.$

$\text{Por tanto } \partial P_5 = 2.2^4 = 32$

06. Um diedro mede 120º. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\ \pi$ cm^3 que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a:

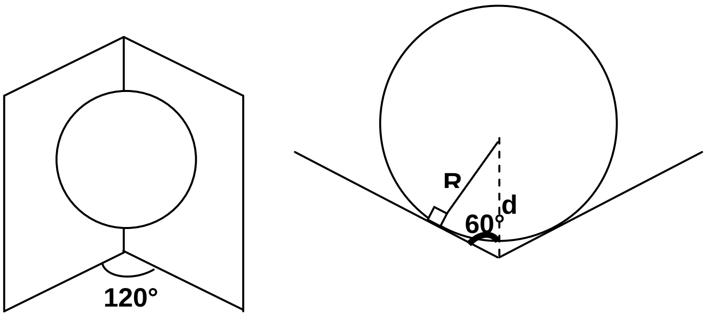
a)$3\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{2}$ c)$2\sqrt{3}$ d)$2\sqrt{2}$ e) 2

Solução: Alternativa E

Cálculo do raio da esfera:

$V = (4/3)\pi R^3 = 4\sqrt{3}\ \pi \rightarrow R^3 = 3\sqrt{3}$

Observando a figura tem-se:



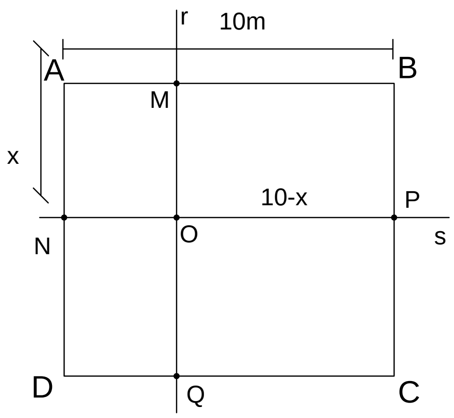
sen60° = R/d → d = 2R/ $\sqrt{3}$ → d = 2 cm

07. Considere o quadrado ABCD com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, eqüidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a intersecção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a intersecção de r com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica , então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

a)$15+5\sqrt{5}$ b)$10+5\sqrt{5}$ c)$10-\sqrt{5}$ d)$15-5\sqrt{5}$ e)$10-3\sqrt{5}$

Solução: Alternativa D

Designando $\overline{AN}$ por x



Sabemos que as áreas são:

.$S_{AMON} = x^2$
.$S_{OPCQ} = (10 - x)^2$
.$S_{ABCD} = 10^2 = 100$

Foi dito que:

$(x^2, (10 - x)^2; 100) \Rightarrow$ PG
$(10-x)^4 = 100x^2$
$(10-x)^2 = \pm 10x$

I. $100 - 20x + x^2 = 10x \therefore x^2 - 30x + 100 = 0$
$\therefore \Delta = 900 - 400 = 500$

$$\therefore X = \frac{30 \pm 10\sqrt{5}}{2} \begin{cases} x_1 = 15 - 5\sqrt{5} \\ x_2 = 15 + 5\sqrt{5} \text{ (não convém pois } x < 10) \end{cases}$$

II. $x^2 - 20x + 100 = -10x$
$\therefore x^2 - 10x + 100 = 0$
$\Delta = 100 - 400 = -300 \Rightarrow \nexists\ N \in R$

Logo $\widehat{AM} = x = 15 - 5\sqrt{5}$

08. Considere o polinômio *p(x)* $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é x = -1. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3 a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com a_4 = ½, então *p(-2)* é igual a:

a) – 25 b) – 27 c) – 36 d) – 39 e) – 40

Solução: Alternativa A

Uma das raízes é $x = -1$, logo:

$-a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0 \qquad (\text{i})$

Além disso, $a_4 = 1/2$ e os coeficientes formam uma P.A, logo:

$$\text{P.A: } \left(\frac{1}{2} - 3\cdot r\ ,\ \frac{1}{2} - 2\cdot r\ ,\ \frac{1}{2} - r\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2} + r\right) \qquad (\text{ii})$$

De (ii) em (i), temos:

$$-\left(\frac{1}{2} + r\right) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - r\right) + \left(\frac{1}{2} - 2\cdot r\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\cdot r\right) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, P.A: } \left(-1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\right) \text{ e } p(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$\text{Então: } p(-2) = (-2)^5 + \frac{1}{2}(-2)^4 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 1 = -25$$

09. Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e ½-*i*/2 também é sua raiz. Então, o Maximo de *a, b, c* é igual a:

a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução: Alternativa C

Seja p(x) = $2x^4 + ax^3 + bx^2 - cx - 1 = 0$, *e* λ_1 e λ_2 as duas raízes inteiras da equação polinomial p(x) = 0.

Como o polinômio tem coeficientes reais, se $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ é raiz, então $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ também será raiz.

Pelas relações de Girard, o produto das quatro raízes vale:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Como essas duas raízes são inteiras, temos:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, as quatro raízes do polinômio são 1, –1, $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ e $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, e sua fatoração correspondente é:

$$p(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\right)\cdot\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\cdot(x^2 - 1)\cdot\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$p(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1$$

Identificando os coeficientes, temos:

a = -2; b = -1 e c = 2

Assim o valor máximo destes coeficientes é 2.

10. É dada a equação polinomial

$(a + c + 2)\ x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$

Com *a, b, c* reais, sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto *abc* é igual a:
a) -2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 12

Solução: Alternativa E
Sendo 1 raiz temos:
$(a + c + 2)\, 1^3 + (b + 3c + 1)1^2 + (c - a)1 + (a + b + 4) = 0$
$a + 2b + 5c + 7 = 0$ (I)
Como a equação recíproca é de primeira espécie e grau ímpar, então -1 também é raiz da equação:
$(a + c + 2).(-1)^3 + (b + 3c + 1).(-1)^2 + (c - a).(-1) + (a + b + 4) = 0$
$a + 2b + c + 3 = 0$ (II)

Além disso, os coeficientes equidistantes dos extremos devem ser iguais. Logo:
$a + c + 2 = a + b + 4 \rightarrow b - c = -2$ (III)
$b + 3c + 1 = c - a \rightarrow a + b + 2c = -1$ (IV)

Temos 4 equações, mais do que o necessário para achar as 3 incógnitas.

Subtraindo II de I temos:
$4c + 4 = 0 \rightarrow c = -1$

Substituindo em III:
$b = -2 - 1 = -3$

Substituindo em IV:
$a = -1 - (-3) - 2.(-1) = 4$

Logo $a.b.c = 4.(-3).(-1) = 12$

11. Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0,\pi]$ o contradomínio da função arcosseno, assinale o valor de:

$$\cos\left(\text{arsen}\frac{3}{5} + \text{arccos}\frac{4}{5}\right).$$

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Solução: Alternativa B

Sejam: $\alpha = arcsen\frac{3}{5}$ e $\beta = \arccos\frac{4}{5}$

Pela definição temos: $sen\alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos\beta = \frac{4}{5}$

Sendo assim: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $sen\beta = \frac{3}{5}$ Portanto: $\alpha = \beta$ Logo:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{7}{25}$$

12. Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular a λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

a) $y = \sqrt{3}\,(x-1)$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

d) $y = \frac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$ e) $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(x-4)$

Solução: Alternativa E

Seja a reta tangente à cônica no ponto $P\left(2, \sqrt{3}\right)$ dada por

$$\frac{y - \sqrt{3}}{x - 2} = m \quad (*)$$

Onde m é o seu coeficiente angular.

$$(*) \Leftrightarrow y = xm - 2m + \sqrt{3}$$

Substituindo a equação acima na equação da cônica

$$x^2 - \left(xm - 2m + \sqrt{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - m^2)x^2 + (4m^2 - 2\sqrt{3}m)x - 4m^2 + 4\sqrt{3}m - 4 = 0$$

Para que a reta seja tangente, à cônica deve-se ter $\Delta = 0$.

$$\Delta = (4m^2 - 2\sqrt{3}m)^2 - 4(1 - m^2)(-4m^2 + 4\sqrt{3}m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 - 16\sqrt{3}m + 16 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 4\sqrt{3}m + 4 = 0$$

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

A reta perpendicular em P é dada por $\frac{y - \sqrt{3}}{x - 2} = m'$, onde

$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo,

$$\frac{y - \sqrt{3}}{x - 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 4)$$

13. O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\,sen^2(3x) + sen(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) $[-3,3]$ e 2π b) $[-2,2]$ e $\frac{2\pi}{3}$ c) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) $[-1,3]$ e $\frac{\pi}{3}$ e) $[-1,3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

Solução: Alternativa C
Dada a função:
$f(x) = 2\,sen^2(3x) + sen(6x) - 1$
Fazendo $2sen^2(3x) - 1 = \cos(6x)$
Tem-se:
$f(x) = sen(6x) + \cos(6x)$
Transformando a soma em produto

$f(x) = 2sen(\pi/4).\cos(6x - \pi/4) \rightarrow f(x) = \sqrt{2}\,.\cos(6x - \pi/4)$
Daí:

$Im = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Período = $\frac{\pi}{3}$

14. Para $X \in R$, o conjunto solução $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 . 5^x| = |5^x - 1|$ é:

a) $\left\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\right\}$ b) $\left\{0, 1, \log_5\left(2 + \sqrt{5}\right)\right\}$

c) $\left\{0, \frac{1}{2}\log_2 2, \frac{1}{2}\log_2 3, \log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

d) $\left\{0, \log_5\left(2 + \sqrt{5}\right), \log_5\left(2 + \sqrt{3}\right), \log_5\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}$

e) A única solução é x = 0.

Solução: Alternativa D
Temos:
$|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 . 5^x| = |5^x - 1|$
$|(5^x)^3 - (5^x)^2 .5 + 4.5^x| = |5^x - 1|$

Tomando $5^x = a$, temos:

$|a^3 - 5a^2 + 4a| = |a - 1|$
$|a\,(a^2 - 5a + 4)| - |a - 1| = 0$
$|a\,(a - 1)\,(a - 4)| - |a - 1 = 0$
$|a|\,|(a - 4)|\,.\,|a - 1| - |a - 1| = 0$
$|\,a - 1|\,.\,(|a|\,|(a - 4)| - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |a - 1| = 0$ ou $|a|\,|(a - 4)| = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 1$ ou $a^2 - 4a = \pm 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 1,\ a^2 - 4a - 1 = 0$ ou $a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 1,\ a = 2 \pm \sqrt{5}$ ou $a = 2 \pm \sqrt{3}$

Como $a = 5^x$, temos:
$5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$5^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \log_5(2 + \sqrt{5})$

$5^x = 2 . \sqrt{5} \Rightarrow \nexists\ x \in R$; $5^x = 2 - \sqrt{5}$, pois $2 - \sqrt{5} < 0$

$5^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_5(2 + \sqrt{3})$

$5^x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_5(2 - \sqrt{3})$

15. Um subconjunto D de R tal que a função *f : D R,* definida por *f(x)* = |*ln(x*^{2} *- x + 1)*| é injetora, é dado por
a) R b) (- ∞, 1] c) [0,1/2] d) (0,1) e) [1/2, ∞)
Solução: Alternativa C
Se a função f dada seja injetora, $\forall\ x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Os conjuntos D possíveis são tais que:
1º Caso:

$$\ln(x^2 - x + 1) \geq 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 - x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 & \text{(i)} \\ \text{ou} & \\ x \geq 1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

2º Caso: $\ln(x^2 - x + 1) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \leq 1 \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

Porém, neste segundo caso, a função $g(x) = x^2 - x + 1$ não é injetora no intervalo $0 \leq x \leq 1$. Para que g(x) seja injetora, tornando f(x) também injetora, pode-se dividir o intervalo pelo x_v da função g(x):

$x_V = \dfrac{1}{2}$. Assim:

$0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ (iii) ou $\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$ (iv). Na verdade, se D for qualquer subconjunto dos intervalos (i), (ii), (iii) ou (iv), a função f será injetora.

16. A soma de todas as soluções distintas da equação
cos 3x + 2 cos6x + cos 9x = 0,
que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a:
a) 2π b) $\dfrac{23}{12}\pi$ c) $\dfrac{9}{6}\pi$ d) $\dfrac{7}{6}\pi$ e) $\dfrac{13}{12}\pi$
Solução: Alternativa E
Reescrevendo a equação cos3x + 2cos6x + cos9x = 0 como cos3x + cos9x + 2cos6x = 0 e aplicando transformação em produto para a soma cos9x + cos3x, temos:

$$\cos 9x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right) = 2\cos 6x.\cos 3x.$$

Assim, a equação se torna:
2cos6x.cos3x+2cos6x=0 ⇒ 2cos6x(cos3x+1)=0.
Logo, cos6x=0 (i) ou cos3x = – 1 (ii).

(i) Para $\cos 6x = 0 \Rightarrow 6x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

Como x está no primeiro quadrante, temos:

$$x = \frac{\pi}{12};\ x = \frac{3\pi}{12};\ x = \frac{5\pi}{12};\ x = \frac{7\pi}{12}$$

(ii) Para cos3x=-1 $\Rightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$

Como x está no primeiro quadrante

$$x = \frac{\pi}{3};$$

Logo, a som pedida é $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{4\pi}{12} = \dfrac{13\pi}{12}$

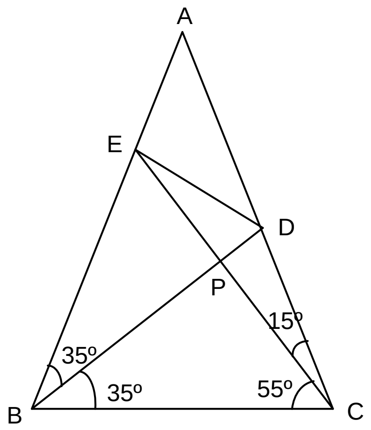
17. Considere o conjunto D = {n ∈ N; 1 ≤ n ≤ 365} e H ⊂ P (D) formado por todos os subconjunto de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento B ∈ H, a probabilidade de a soma de sues elementos ser 183 é igual a
a) $\dfrac{1}{730}$ b) $\dfrac{46}{33215}$ c) $\dfrac{1}{365}$ d) $\dfrac{92}{33215}$ e) $\dfrac{91}{730}$
Solução: Alternativa A
De acordo com o enunciado:
H = {{1;2},{1;3},...{1;365},{2;3},{2;4},...,{2;365},...,{364;365}}

O conjunto C dos possíveis elementos B é:
C = {{1;182};{2;181},{3;180},...,{91;92}}

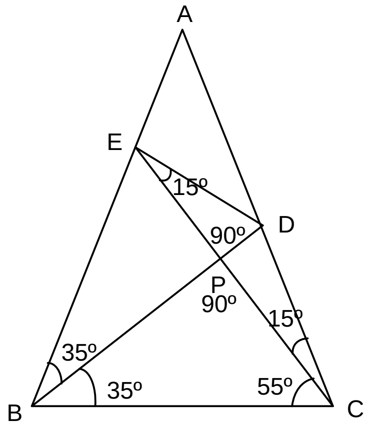
Seja n(H) o número de elementos de H e n(C) o número de elementos C (o total de elementos B que atendem à propriedade). Então:

$$P = \frac{n(C)}{n(H)} = \frac{91}{C_{365}^{2}} = \frac{91}{\frac{365.364}{2}} = \frac{91}{365.182} = \frac{1}{730}$$

18. Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, BÂC, mede 40º. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15º$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C$ =35º
Então, o ângulo $E\hat{D}C$ vale:
a) 35° b) 45° c) 55º d) 75º e) 85º
Solução: Alternativa D
A figura descrita é dada a seguir:

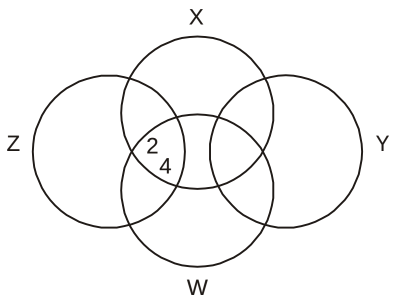


O ângulo $C\hat{P}D$ é dado por: $B\hat{P}C = 180º - 55º - 35º = 90º$
portanto, temos $B\hat{E}P = 55º$.
Sendo assim, o triângulo CBE é isósceles. Como $\overline{EP} = \overline{PC}$, então, por semelhança lado-ângulo-lado, os triângulos EPD e CPD são semelhantes.

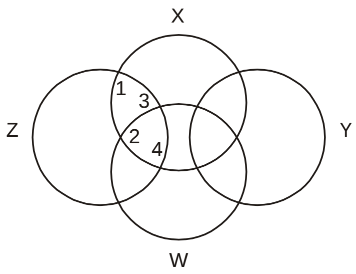


Sendo assim o ângulo pedido é:
$E\hat{D}B = E\hat{D}P = 180º - 90º - 15º$
$\Rightarrow E\hat{D}B = 75º$

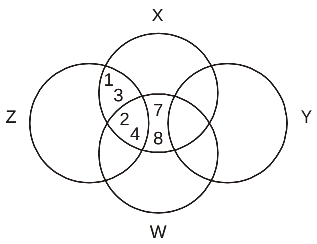
19. Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de N tais que (x – Y) ∩ Z = {1, 2, 3, 4}, Y = {5, 6}, Z ∩ Y = ∅, W ∩ W ∩ Z = {2, 4}. Então o conjunto [X ∩ (Z ∪ W)] – [W ∩ (Y ∪ Z)] é igual a:
a) {1, 2, 3, 4, 5} b) {1, 2, 3, 4, 7} c) {1, 3, 7, 8} d) {1, 3} e) {7, 8}
Solução: Alternativa C
As relações de união e interseção entre os quatro conjuntos podem ser visualizados através de quatro diagramas circulares, pois $Z \cap Y = \varnothing$.



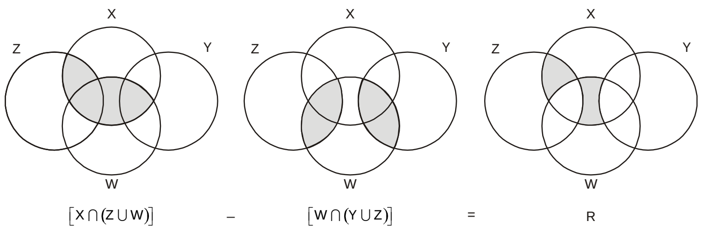
pois $X \cap W \cap Z = \{2,\ 4\}$



pois $(X - Y) \cap Z = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$



pois $W \cap (X - Y) = \{7,\ 8\}$ e $Y = \{5,\ 6\}$



Portanto, $R = \{1,\ 3,\ 7,\ 8\}$

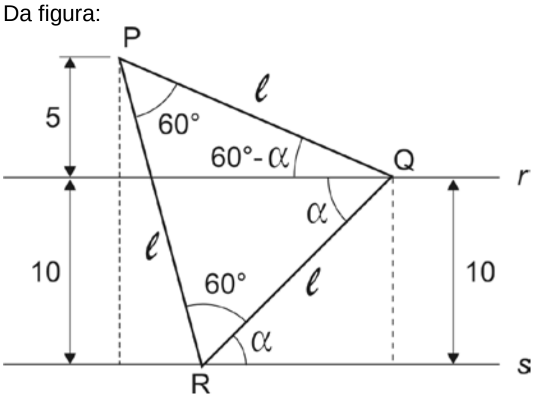
20. Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja *P* um ponto no plano definido por *r* e *s* e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de *r*. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo eqüilátero *PQR* cujos vértices *Q* e *R* estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, são iguais a:

a) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$ b) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$ c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$ e) 700 e $10\sqrt{21}$

Solução: Alternativa B

Da figura:



$\text{sen}\alpha = 10/\ell$ (eq. 1)

$\text{sen}(60° - \alpha) = 5/\ell$ (eq. 2)

Desenvolvendo eq 2, tem-se:

$\text{sen}60°.\cos\alpha - \text{sen}\alpha.\cos60° = 5/\ell \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos\alpha - \text{sen}\alpha.\dfrac{1}{2} = 5/\ell \to$

$\sqrt{3}.\cos\alpha - \text{sen}\alpha = 10/\ell \to \quad \sqrt{3}.\cos\alpha - \text{sen}\alpha = \text{sen}\alpha \to$

$\sqrt{3}.\cos\alpha = 2\text{sen}\alpha \to$

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{sen}\alpha$

Da equação fundamental da trigonometria:
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
substituindo $\cos\alpha$

$\to \text{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Voltando à eq.1 encontramos:

$\text{sen}\alpha = 10/\ell \to \dfrac{\sqrt{21}}{7} = 10/\ell \to \ell = \dfrac{10\sqrt{21}}{3}$

Assim:

$A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{175\sqrt{3}}{3}$

$2p = 3\ell = 10\sqrt{21}$

DISSERTATIVAS

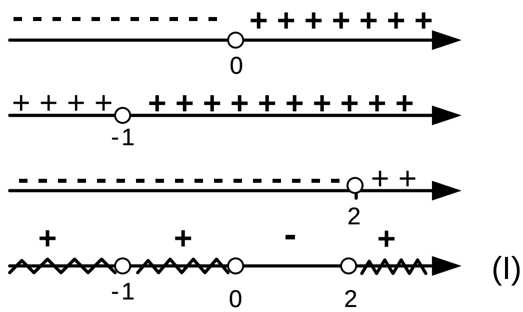
21. Dado o conjunto $A = \{x \in \Re;\ \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

Solução:

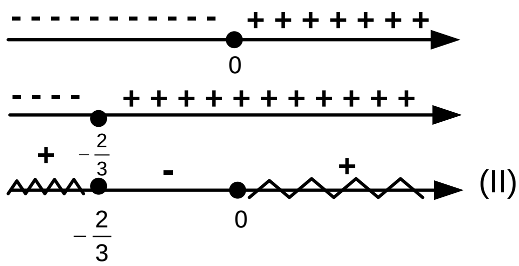
Temos:

$\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x < x^4 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 2x > 0$

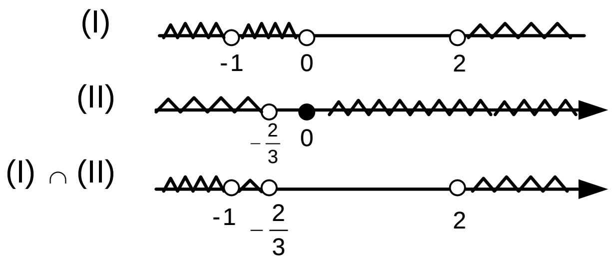
O polinômio $P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ tem como raízes -1 (raiz dupla), 0 e 2.
Queremos $P(x) > 0$, ou seja, $x(x+1)^2(x-2) > 0$. Assim, segue:



Mas temos ainda que $3x^2 + 2x \geq 0$, ou seja, $x(3x+2) \geq 0$. Daí vem:



De (I) e (II), vem:



Logo, o conjunto solução é dado por S= $\left\{x \in R \mid x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 2 \text{ e } x \neq -1\right\}$

22. Determine as raízes em C de $4z^6 + 256 = 0$, na forma *a+bi*, com *a,b*$\in\Re$, que pertençam a

S = {*z* ∈ C; 1 < |*z* + 2| < 3}.

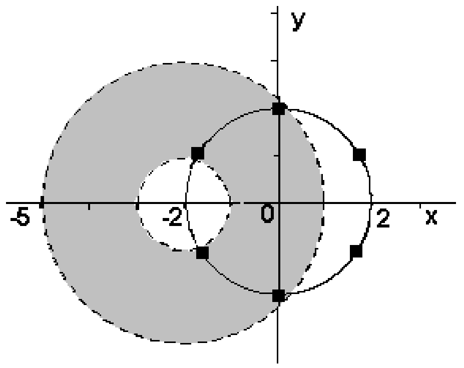
Solução:

$4z^6 + 256 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-64}$

$\Rightarrow V = \left\{2\text{cis}\frac{\pi}{6}; 2\text{cis}\frac{\pi}{2}; 2\text{cis}\frac{5\pi}{6}; 2\text{cis}\frac{7\pi}{6}; 2\text{cis}\frac{3\pi}{2}; 2\text{cis}\frac{11\pi}{6}\right\}$

A região limitada pela inequação $1 < |z+2| < 3$ é a coroa circular (ver figura) de raios 3 e 1 e centro no ponto (-2, 0). Assim, as únicas duas raízes da equação que não pertencem à região hachurada são $2\text{cis}\frac{\pi}{6}$ e $2\text{cis}\frac{11\pi}{6}$.

Então: S ∩ V = $\left\{\pm 2i\ ;\ -\sqrt{3} \pm i\right\}$



23. Seja f(x) = ln(x^2+x+1), x$\in\Re$. Determine as funções *h, g* : $\Re\to\Re$ tais que *f(x)=g(x) + h(x),* $\forall x\in\Re$, sendo *h* uma função par e *g* uma função impar.

Solução:

Observe que, dada uma função f(x), ela pode ser decomposta na soma de uma função par com uma função ímpar. Para tanto, note que:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

onde a função $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ é par e a função $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é ímpar.

Assim:

$$h(x) = \frac{\ln(x^2+x+1)+\ln(x^2-x+1)}{2} = \frac{\ln((x^2+1)^2-x^2)}{2} \Rightarrow$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1).$$

$$g(x) = \frac{\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right).$$

Logo, $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)$.

24. Sejam $\alpha,\beta,\gamma \in \Re$. Considere o polinômio *p(x)* dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha-\beta-2\gamma)x^3 + (\alpha+2\beta+2\gamma-2)x^2 + (\alpha-\beta-\gamma+1)x + (2\alpha+\beta+\gamma-1)$$

Encontre todos os valores de α,β,γ de modo que x=0 seja uma raiz com multiplicidade 3 de *p(x).*

Solução:

Como 0 é raiz tripla de P, temos que p(x) = x^3.q(x), q$\in\Re$ [x].

Logo é necessário e suficiente que

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

A resposta é α=0, β+γ=1 com β,γ ∈R

25. Uma matriz real quadrada *A* é ortogonal se *A* é inversível e $A^{-1}=A^t$. Determine todas as matrizes 2 x 2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Solução:

De $A^{-1} = A^t$, temos: $A^t \cdot A = I$

Como A é simétrica, temos $A^t = A$. Logo: $A^2 = I$. (*)

Além disso, por ser A simétrica ela é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

A partir de (*):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ ab+bc = 0 \\ b^2+c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ b(a+c) = 0 \\ b^2+c^2 = 1 \end{cases}$$

Da segunda equação:

b = 0 ou a + c = 0

Se b = 0, então $a = \pm 1$ e $c = \pm 1$.

Se a + c = 0, ou seja, a = - c, Dado que $a^2 = 1 - b^2$, temos:

$a = \pm\sqrt{1-b^2}$. Portanto: $c = \mp\sqrt{1-b^2}$.

Sendo assim:

$A = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \mp\sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}$, com $b \in [-1,1]$ ou $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

26. Determine todos os valores $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x)

$$x^4 - 2\sqrt[3]{4}x^2 + \text{tg}\,\alpha = 0$$

admita raízes reais simples.

Solução:

Para que a equação em x tenha apenas raízes reais simples é necessário e suficiente que a equação em y

$$y^2 - 2\sqrt[4]{3}y + \text{tg}\alpha = 0$$

Tenha duas raízes reais positivas distintas. A condição para raízes reais distintas é

$$\Delta > 0 \iff \text{tg}\alpha < \sqrt{3}.$$

Além disso, a menor raiz deve ser positiva, ou seja,

$$\sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - \text{tg}\alpha} > 0 \iff a < \text{tg}\alpha < \sqrt{3}.$$

Assim, o conjunto de todos os valores de α pedidos é $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$.

27. Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos *A,B* e *C* tais que: *P(A)=P(B)=1/2*, com *A* e *B* independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$.
Calcule as probabilidades condicionais $P(C|A \cap B)$ e $P(C|A \cap B^C)$.

Solução:

$$P(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Sendo eventos independentes:
- $p(A \cap B) = p(A).p(B)$

i) $P(C/A \cap B) = \dfrac{p(A \cap B \cap C)}{p(A).p(B)} = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = ¼$

ii) Dado que: $p((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \dfrac{3}{10}$ e sendo

$p((A \cap B) \cup (A \cap C)) = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C))$
Então,

$\dfrac{3}{10} = p(A).p(B) + p(A \cap C) - \dfrac{1}{16} \rightarrow p(A \cap C) = \dfrac{3}{10} - p(A).p(B) + \dfrac{1}{16} \rightarrow$

$p(A \cap C) = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16} \rightarrow p(A \cap C) = \dfrac{9}{80}$

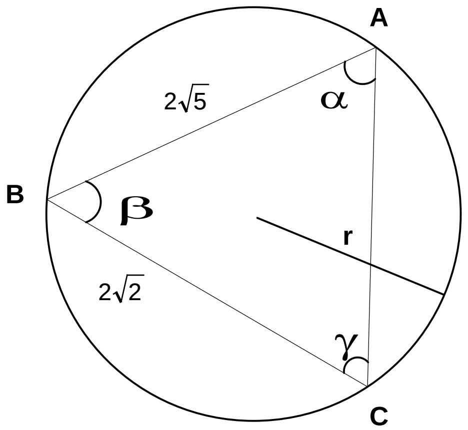
Então:

$$p(C/A \cap B^C) = \frac{p(A \cap B^C \cap C)}{p(A \cap B^C)} = \frac{p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C)}{p(A) - p(A \cap B)} \rightarrow$$

$$p(C/A \cap B^C) = \frac{\frac{9}{80} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

28. Um triângulo acutângulo de vértices *A, B* e *C* está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo *ABC.*

Solução:



Pela lei dos senos temos:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{\text{sen}\gamma} = 2r \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{\text{sen}\gamma} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{3}{5} \text{ e } \text{sen}\gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

sen β = sen [180º - ($\alpha + \gamma$)] = sen ($\alpha + \gamma$) = sen α cos γ + sen γ cos α

$= \dfrac{3}{5}.\dfrac{\sqrt{10}}{10} + \dfrac{3\sqrt{10}}{10}.\dfrac{4}{5}$, pois

$\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}$ e $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2}$. Assim, segue:

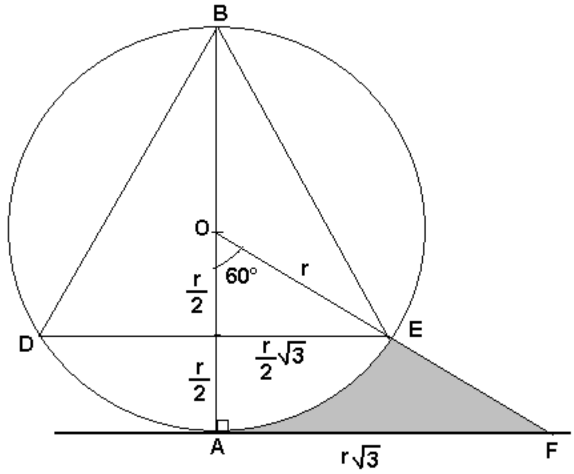
$$\text{sen}\beta = \frac{3\sqrt{10}}{50} + \frac{12\sqrt{10}}{50} = \frac{15\sqrt{10}}{50} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

A área do ΔABC é dada por:
A

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.2\sqrt{2}.\text{sen}\beta = \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.2\sqrt{2}.\frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}.3\sqrt{10}}{10} = 6 \text{ u.a}$$

29. Seja *C* uma circunferência de raio *r* e centro *O* e $\overline{AB}$ um diâmetro de *C.* Considere o triângulo eqüilátero *BDE* inscrito em *C*. Traça-se a reta *s* passando pelos pontos *O* e *E* até interceptar em *F* a reta *t* tangente à circunferência *C* no ponto *A*. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco $\overset{\frown}{AE}$ e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

Solução:
A figura em questão é dada pelo esquema abaixo:



A rotação de AEF em torno do eixo AB gera um sólido cujo volume é dado pela retirada de uma calota esférica (altura r/2 e raio da seção $r\sqrt{3}/2$), de um tronco de cone (altura r/2 e raios de base $r\sqrt{3}/2$ e $r\sqrt{3}$).

$$V_{TRONCO} = \frac{h}{3}\left(S_B + S_b + \sqrt{S_B.S_b}\right) \Rightarrow$$

$$V_{TRONCO} = \frac{r}{6}\left(3\pi r^2 + \frac{3\pi r^2}{4} + \sqrt{3\pi r^2.\frac{3\pi r^2}{4}}\right) = \frac{21\pi r^3}{24}$$

$$V_{CALOTA} = \frac{\pi h}{6}\left(3R^2 + h^2\right) = \frac{\pi r}{12}\left[3\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] = \frac{5\pi r^3}{24}$$

$$V_S = V_{TRONCO} - V_{CALOTA} = \frac{21\pi r^3}{24} - \frac{5\pi r^3}{24} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

30. Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos (2,5), (-1,2) e tal que *a,b,c* formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto (2,5).

Solução:
Como a, b e c estão em P.A., podemos escrever:

$$a = b - r \quad , \quad c = b + r.$$

Substituindo então esses valores na equação da parábola, encontramos $y = (b - r)x^2 + bx + b + r$.
Como os pontos (2,5) e (-1,2) estão na parábola, temos:

$$\begin{cases} 4(b - r) + 2b + b + r = 5 \\ b - r - b + b + b + r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7b - 3r = 5 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ r = 3 \end{cases}$$

Assim, temos que a = 2 – 3 = -1 e c = 2 + 3 = 5. Desse modo, a parábola é $y = -x^2 + 2x + 5$.
Seja r a reta que tangente à parábola em (2,5). Usando a relação y - y_o = m(x - x_o), temos:

$$r: y = m(x - 2) + 5$$

Igualando as equações da parábola e da reta:

$$m(x - 2) + 5 = -x^2 + 2x + 5 \Rightarrow x^2 + (m - 2)x - 2m = 0$$

Como a reta é tangente, existe um único valor de x que deve satisfazer a equação do segundo grau acima, de modo que obrigatoriamente temos que o discriminante dessa equação deve ser zero. Assim:

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \pm \frac{\sqrt{4^2 - 4.4}}{2} \Rightarrow m = -2$$

Logo, a reta tangente é y+2x-9=0.
O vértice da parábola é dado por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-2}{-2}, -\frac{2^2 - 4.(-1).5}{-4}\right) = (1, 6).$$

Aplicando finalmente a fórmula da distância de ponto à reta, encontramos:

$$\text{distância} = \left|\frac{6 + 2.1 - 9}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$