

**MATEMÁTICA**

**Notações**

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros
- $\mathbb{Q}$ : conjunto dos números racionais
- $\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ : conjunto dos números complexos
- $i$ : unidade imaginária;  $i^2 = -1$
- $|z|$ : módulo do número  $z \in \mathbb{C}$
- $\bar{z}$ : conjugado do número  $z \in \mathbb{C}$
- $\text{Re } z$ : parte real de  $z \in \mathbb{C}$
- $\text{Im } z$ : parte imaginária de  $z \in \mathbb{C}$
- $\binom{n}{p}$ : número de combinações de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ .
- $\text{mdc}(j, k)$ : máximo divisor comum dos números inteiros  $j$  e  $k$ .
- $n(X)$ : número de elementos de um conjunto finito  $X$ .
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ .
- Obs: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

**Questão 01.** Se  $A, B, C$  forem conjuntos tais que  $n(A \cup B) = 23$ ,  $n(B - A) = 12$ ,  $n(C - A) = 10$ ,  $n(B \cap C) = 6$  e  $n(A \cap B \cap C) = 4$ , então  $n(A)$ ,  $n(A \cup C)$ ,  $n(A \cup B \cup C)$ , nesta ordem,

- formam uma progressão aritmética de razão 6.
- formam uma progressão aritmética de razão 2.
- formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
- formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo primeiro termo é 31.
- não formam uma progressão aritmética.

**SOLUÇÃO: D**

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$$

$$23 = n(A) + 12 \Rightarrow \boxed{n(A) = 11}$$

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C - A)$$

$$n(A \cup C) = 11 + 10 \Rightarrow \boxed{n(A \cup C) = 21}$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(C - A) + n(B - A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 11 + 10 + 12 - 6 + 4 \Rightarrow \boxed{n(A \cup B \cup C) = 31}$$

**Questão 02.** Seja  $A$  um conjunto com 14 elementos e  $B$  um subconjunto de  $A$  com 6 elementos. O número de suconjuntos de  $A$  com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de  $B$  é

- $2^8 - 9$
- $2^8 - 1$
- $2^8 - 2^6$
- $2^{14} - 2^8$
- $2^8$

**SOLUÇÃO: A**

Para que um subconjunto  $C$  de  $A$  seja disjunto de  $B$ , isto é,  $C \cap B = \emptyset$ , nenhum elemento de  $C$  pode ser elemento de  $B$ . Como  $C$  é subconjunto de  $A$ , então os elementos de  $C$  devem ser escolhidos dentre os 8 elementos de  $A$  que não estão em  $B$  ( $14 - 6$ ).  $C$  pode ter de zero a 8 elementos, assim a quantidade de possibilidades para conjuntos  $C$  diferentes entre si vale:

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = 2^8 - 2^6 - 1 = 2^8 - 9$$

Pelo teorema das linhas do triângulo de Pascal, sabemos que esta soma vale  $2^8 - C_8^7 + C_8^8 = 2^8 - 8 - 1 = 2^8 - 9$

**Questão 03.** Considere a equação:  $16 \left( \frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 = \left( \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} \right)^4$

Sendo  $x$  um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

- 3.
- 6.
- 9.
- 12.
- 15.

**SOLUÇÃO: B**

$$16 \left( \frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 = \left[ \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{2} \right]^4$$

$$\left( \frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 = 1 \rightarrow \frac{(1-ix)^3}{(1+ix)^3} = 1 \rightarrow (1-ix)^3 = (1+ix)^3$$

$$(1+ix)^3 - (1-ix)^3 = 0 \rightarrow 2ix(3-x^2) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}$$

Assim, a soma pedida é:  $0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$

**Questão 04.** Assinale a opção que indica o módulo do número complexo  $\frac{1}{1+i \cdot \cot g(x)}$ ,  $x \neq k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- $|\cos(x)|$
- $(1 + \text{sen}(x))/2$
- $\cos^2(x)$
- $|\cos \text{sec}(x)|$
- $|\text{sen}(x)|$

**SOLUÇÃO: E**

$$\frac{1}{1+i \cdot \cot g(x)} = \frac{1}{1+i \cdot \cot g(x)} \cdot \frac{(1-i \cdot \cot g(x))}{(1-i \cdot \cot g(x))} = \frac{(1-i \cdot \cot g(x))}{(1+\cot^2(x))}$$

$$\frac{1}{1+i \cdot \cot g(x)} = \frac{(1-i \cdot \cot g(x))}{\cos^2(x)} = \text{sen}^2(x) - i \cdot \text{sen}^2(x) \cdot \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

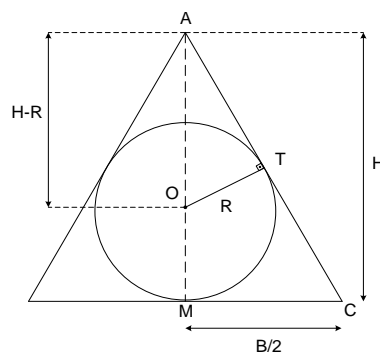
$$\frac{1}{1+i \cdot \cot g(x)} = \text{sen}(x) \cdot (\text{sen}(x) - i \cdot \cos(x))$$

$$\left| \frac{1}{1+i \cdot \cot g(x)} \right| = |\text{sen}(x)| \cdot |(\text{sen}(x) - i \cdot \cos(x))| = |\text{sen}(x)|$$

**Questão 05.** Considere: um retângulo cujos lados medem  $B$  e  $H$ , um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente,  $B$  e  $H$ , e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então  $B/H$  é uma raiz do polinômio

- $\pi^3 x^3 + \pi^2 x^2 + \pi x - 2 = 0$
- $\pi^2 x^3 + \pi^3 x^2 + x + 1 = 0$
- $\pi^3 x^3 - \pi^2 x^2 + \pi x + 2 = 0$
- $\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$
- $x^3 - 2\pi^2 x^2 + \pi x - 1 = 0$

**SOLUÇÃO: D**



Como  $B$  e  $H$  são parâmetros, então seja  $x$  tal que  $B = x \cdot H$ . Temos que:

Área do retângulo:  $BH$

Área do triângulo:  $\frac{BH}{2}$

Como as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo estão em progressão geométrica, então a área do círculo será tal que:

$$\pi R^2 = \frac{BH}{4} \Rightarrow R = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

Ainda, da figura temos que:

$$\Delta AOT \sim \Delta ACM \Rightarrow \frac{H-R}{R} = \frac{2AC}{B}$$

$$\Rightarrow \frac{H-R}{R} = \frac{\sqrt{B^2 + 4H^2}}{B}$$

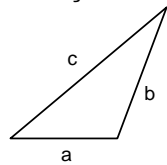
Substituindo  $B=x.H$  e a relação do raio do círculo na igualdade acima, chegamos que:

$$\begin{aligned} H - \frac{H}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}} &= \frac{\sqrt{x^2 H^2 + 4H^2}}{xH} \Rightarrow \\ \frac{H}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}} &= \frac{H}{xH} \sqrt{x^2 H^2 + 4H^2} \Rightarrow \\ \frac{1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}} &= \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} \Rightarrow 2\sqrt{x\pi} = x + \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x\pi &= x^2 + x^2 + 4 + 2x\sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow \\ \Rightarrow (2x\pi - x^2 - 2)^2 &= x^2(x^2 + 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x^2\pi^2 + x^4 + 4 - 4x^3\pi - 8x\pi + 4x^2 &= x^4 + 4x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x^2\pi^2 + 4 - 4x^3\pi - 8x\pi &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0} \end{aligned}$$

**Questão 06.** Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão  $q$ , então  $q$  pertence ao intervalo:

- a)  $(0, (1+\sqrt{2})/2)$
- b)  $((1+\sqrt{2})/2, \sqrt{(1+\sqrt{5})}/2)$
- c)  $(\sqrt{(1+\sqrt{5})}/2, (1+\sqrt{5})/2)$
- d)  $((1+\sqrt{5})/2, \sqrt{(2+\sqrt{2})}/2)$
- e)  $(\sqrt{(2+\sqrt{2})}/2, (1+\sqrt{3})/2)$

**SOLUÇÃO: C**



$$\begin{cases} c^2 > a^2 + b^2 \rightarrow \text{Teorema dos senos} \\ c < a + b \rightarrow \text{Desigualdade triangular} \end{cases}$$

Descarta-se a possibilidade de  $q = 1$  (triângulo equilátero)

Supondo a PG crescente ( $q > 1$ ), os lados do triângulo são:  $a, a.q$  e  $a.q^2$  onde o maior lado é  $a.q^2$ .

Pela condição de ser obtusângulo:

$$(a.q^2)^2 > a^2 + (a.q)^2 \Rightarrow a^2.q^4 - a^2 - a^2.q^2 > 0 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\text{inequação biquadrada: } x = q^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ pela condição de } x, q > 0 \text{ tem-se:}$$

$$q^2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q > \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Pela desigualdade triangular o lado maior se limita por:

$$a.q^2 < a + a.q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 0 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Assim tem-se: } \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Supondo a PG decrescente ( $0 < q < 1$ ) têm-se os lados do triângulo:  $a, a.q$  e  $a.q^2$  onde o maior lado é  $a$ . Assim:

Pela condição de ser obtusângulo:

$$a^2 > (a.q^2)^2 + (a.q)^2 \Rightarrow a^2.q^4 - a^2 + a^2.q^2 < 0 \Rightarrow q^4 + q^2 - 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\text{inequação biquadrada: } x = q^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow, \text{ pela condição de } x, q > 0 \Rightarrow q^2 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Pela desigualdade triangular o lado maior se limita por:

$$a.q + a.q^2 > a \Rightarrow q^2 + q - 1 > 0 \Rightarrow q < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Uma vez que o enunciado não especifica a classificação da PG, haveria duas respostas possíveis:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \text{ ou } \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Obs: Certamente, Uma vez encontrado o intervalo para uma PG crescente, basta inverter a razão e escrever os termos em sentido oposto e você terá uma PG decrescente com os mesmos valores numéricos! Se  $(a,b,c)$  é uma PG de razão  $q$  crescente então  $(c,b,a)$  é uma PG de razão  $1/q$  decrescente!

$$\text{Veamos: Se } 0 < \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} > \frac{1}{q} > \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow$$

$$\text{tomando } \frac{1}{q} = q' \text{ por racionalização que: } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q' < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

**Questão 07.** Sejam  $x, y$  e  $z$  números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base  $k$  são números primos satisfazendo

$$\begin{cases} \log_k(x \cdot y) = 49, \\ \log_k(x/z) = 44. \end{cases}$$

Então,  $\log_k(x \cdot y \cdot z)$  é igual a

- a) 52      b) 61      c) 67      d) 80      e) 97

**SOLUÇÃO: A**

$$\begin{cases} \log_k x + \log_k y = 49 \\ \log_k x - \log_k z = 44 \end{cases} \Rightarrow \log_k y + \log_k z = 5$$

Como  $\log_k x, \log_k y$  e  $\log_k z$  são todos números primos então

$\log_k y = 2, \log_k z = 3$  e  $\log_k x = 47$ . Portanto,

$$\log_k(x \cdot y \cdot z) = \log_k x + \log_k y + \log_k z = 52$$

**Questão 08.** Sejam  $x$  e  $y$  dois números reais tais que  $e^x, e^y$  e o

quociente  $\frac{e^x - 2 \cdot \sqrt{5}}{4 - e^y \cdot \sqrt{5}}$  são todos racionais. A soma  $x + y$  é igual a

- a) 0      b) 1      c)  $2 \cdot \log_5 3$       d)  $\log_5 2$       e)  $3 \cdot \log_e 2$

**SOLUÇÃO: E**

Se  $e^x, e^y$  e  $\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$  são racionais então desenvolvendo o

quociente tem-se:

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}} \cdot \frac{(4 + e^y\sqrt{5})}{(4 + e^y\sqrt{5})} = \frac{4e^x - 10e^y + \sqrt{5}(e^{x+y} - 8)}{16 - 5e^{2y}}$$

Analisando este novo quociente tem-se que

I. o denominador é um racional, por consequência de  $e^y$  também o ser.

II. o termo  $4e^x - 10e^y$  do numerador também é racional pelo mesmo motivo, e o único termo que pode tornar o numerador irracional é o termo  $\sqrt{5}(e^{x+y} - 8)$ .

Logo para que o quociente-problema seja racional tem-se que:

$$\sqrt{5}(e^{x+y} - 8) = k \text{ onde } k \text{ é um racional}$$

$$e^{x+y} - 8 = \frac{k}{\sqrt{5}} \Rightarrow e^{x+y} = 8 + \frac{k}{\sqrt{5}} \Rightarrow x+y = \ln\left(8 + \frac{k}{\sqrt{5}}\right)$$

Obs: Esta é a solução geral. O enunciado comete um pequeno equívoco, pois diz que "A soma  $x+y$  é IGUAL a", enquanto entendemos que o correto seria "UMA soma  $x+y$  possível é IGUAL a"...

Fazendo  $k = 0$  tem-se  $x+y = \ln(8) = 3\ln(2)$

**Questão 09.** Seja  $Q(z)$  um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de  $z^5$  é igual a 1. Sendo  $z^3 + z^2 + z + 1$  um fator de  $Q(z)$ ,  $Q(0) = 2$  e  $Q(1) = 8$ , então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de  $Q(z)$  é igual a

- a) 9      b) 7      c) 5      d) 3      e) 1

**SOLUÇÃO: B**

$$Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (az^2 + bz + c)$$

Como  $Q(0) = 2$ , o termo independente de  $Q$  deve ser 2, logo  $c=2$

Como o coeficiente de  $z^5$  é igual a 1, então  $a=1$ , logo:

$$Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (z^2 + bz + 2)$$

$$Q(1) = 8 \rightarrow 4 \cdot (1+b+2) = 8 \rightarrow b = -1 \text{ e assim}$$

$$Q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (z^2 - z + 2)$$

As raízes de  $Q$  são as raízes de seus dois fatores.

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \rightarrow \frac{z^4 - 1}{z - 1} = 0 \rightarrow z_1 = -1; z_2 = i; z_3 = -i \text{ (são as raízes}$$

quartas da unidade, exceto 1)  $\rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

$$z^2 - z + 2 = 0 \rightarrow z_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \text{ e } |z_4| = |z_5| = \sqrt{2}$$

$$\text{Desta maneira } |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 7$$

**Questão 10.** Sendo  $c$  um número real a ser determinado, decomponha o polinômio  $9x^2 - 63x + c$ , numa diferença de dois cubos

$$(x+a)^3 - (x+b)^3$$

Neste caso,  $|a+b| - c$  é igual a

a) 104	b) 114	c) 124	d) 134	e) 144
--------	--------	--------	--------	--------

**SOLUÇÃO: B**

$$\text{Temos que: } \begin{cases} (x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 \\ (x+b)^3 = x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 \end{cases}$$

Igualando a subtração dos dois cubos com o polinômio, temos:

$$9x^2 - 63x + c = (x+a)^3 - (x+b)^3 = 3(a-b)x^2 + 3(a^2 - b^2)x + (a^3 - b^3)$$

Da igualdade entre polinômios:

$$\begin{cases} 3(a-b) = 9 \\ 3(a^2 - b^2) = -63 \\ c = a^3 - b^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b = 3 \\ a+b = -7 \\ c = a^3 - b^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = 117 \end{cases}$$

$$\text{Assim, } |a+b| - c = |-2+|-5|| - 117 = |-114| = 114$$

**Questão 11.** Sobre a equação na variável real  $x$ ,  $||x-1|-3|-2| = 0$ ,

podemos afirmar que

- a) ela não admite solução real.  
 b) a soma de todas as suas soluções é 6.  
 c) ela admite apenas soluções positivas.  
 d) a soma de todas as soluções é 4.  
 e) ela admite apenas duas soluções reais.

**SOLUÇÃO: D**

$$||x-1|-3|-2| = 0 \Rightarrow ||x-1|-3| - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|-3 = 2 \\ \text{ou} \\ |x-1|-3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|-3 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 5 \Rightarrow x = 6 \\ \text{ou} \\ x-1 = -5 \Rightarrow x = -4 \end{cases} \\ |x-1|-3 = -2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ x-1 = -1 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$S = \{-4; 0; 2; 6\}$$

A soma das soluções é 4.

**Questão 12.** Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

- a) 204      b) 206      c) 208      d) 210      e) 212

**SOLUÇÃO: E**

Os números de três algarismos, não repetidos, formados utilizando-se 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de acordo com o princípio fundamental da contagem, são dados por  $7 \times 6 \times 5 = 210$ . Ao levar-se em conta a condição do enunciado, percebe-se que, se o número começar por 1 ou 2 tem-se apenas duas possibilidades, que são os números 177 e 277, portanto há um total de 212 possibilidades.

**Questão 13.** Seja  $x$  um número real no intervalo  $0 < x < \pi/2$ . Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas

as soluções da desigualdade  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \sec(x) \geq 0$ .

- a)  $\frac{\pi}{2}$       b)  $\frac{\pi}{3}$       c)  $\frac{\pi}{4}$       d)  $\frac{\pi}{6}$       e)  $\frac{\pi}{12}$

**SOLUÇÃO: D**

Primeiramente temos que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \text{ e}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\text{Então } \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2} = \frac{\cos x}{2} \text{ . Temos então que:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} \cdot \left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) \cdot \sec(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg} x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x \cdot \sec(x) \geq 0 \text{ . Como } 0 < x < \pi/2 \text{ ,}$$

$$\cos x \neq 0 \text{ , logo } \frac{1}{2 \cdot \operatorname{tg} x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(\operatorname{tg} x)} \geq \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \text{ . Segue então que o menor}$$

comprimento que contém todas as soluções com  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ , será

$$S = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6} \text{ .}$$

**Questão 14.** Assinale a opção que indica a soma dos elementos de

$$A \cup B \text{ , sendo: } A = \left\{ x_k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{k^2 \cdot \pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{ y_k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{(3 \cdot k + 5) \cdot \pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\} \text{ .}$$

- a) 0      b) 1      c) 2

d)  $(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}) / 3$                       e)  $(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}) / 3$

**SOLUÇÃO: C**

Elementos de A:

$x_1 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{24}\right), x_2 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Elementos de B:

$y_1 = \text{sen}^2\left(\frac{8\pi}{24}\right) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, y_2 = \text{sen}^2\left(\frac{11\pi}{24}\right)$

Como  $y_2 = \text{sen}^2\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$ , pois  $\frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2}$  (ângulos complementares), temos que:

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{24}\right) + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = 1 + 1 = 2$

**Questão 15.** Sejam  $A = (a_{jk})$  e  $B = (b_{jk})$ , duas matrizes quadradas  $n \times n$ , onde  $a_{jk}$  e  $b_{jk}$  são, respectivamente, os elementos da linha  $j$  e coluna  $k$  das matrizes  $A$  e  $B$ , definidos por

$a_{jk} = \binom{j}{k}$ , quando  $j \geq k$ ,  $a_{jk} = \binom{k}{j}$ , quando  $j < k$  e

$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \cdot \binom{jk}{p}$ .

O traço de uma matriz quadrada  $(c_{jk})$  de ordem  $n \times n$  é definido por

$\sum_{p=1}^n c_{pp}$ . Quando  $n$  for ímpar, o traço de  $A + B$  é igual a

- a)  $n \cdot (n-1) / 3$ .
- b)  $(n-1) \cdot (n+1) / 4$
- c)  $(n^2 - 3 \cdot n + 2) / (n-2)$
- d)  $3 \cdot (n-1) / n$
- e)  $(n-1) / (n-2)$

**SOLUÇÃO: C**

Lembrando da expansão do binômio de Newton

$(x + y)^{jk} = \sum_{p=0}^{jk} \binom{jk}{p} (x)^p (y)^{jk-p}$

e observando a forma de  $b_{jk}$  tem-se

$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p} (1)^{jk-p} = (-2 + 1)^{jk} = (-1)^{jk}$

A diagonal principal da matriz  $B$  é formada por uma seqüência de  $n$  termos  $\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots, -1\}$ , enquanto a diagonal principal da matriz  $A$  é formada por uma seqüência de  $n$  termos  $\{1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1\}$ .

Logo se  $n$  é ímpar, o traço da matriz  $A + B$  será a soma da seqüência  $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots, 2\}$  que é:  $\text{tr}(A + B) = 2 \cdot \frac{(n-1)}{2} = n-1$

e dentro das possíveis soluções tem-se que esta é equivalente a

$n-1 = (n-1) \cdot \frac{(n-2)}{(n-2)} = \frac{(n^2 - 3n + 2)}{(n-2)}$

**Questão 16.** Considere no plano cartesiano  $xy$  o triângulo delimitado pelas retas  $2x = y$ ,  $x = 2y$  e  $x = -2y + 10$ . A área desse triângulo mede

- a) 15/2      b) 13/4      c) 11/6      d) 9/4      e) 7/2

**SOLUÇÃO: A**

Os vértices do triângulo são as interseções das retas, duas a duas:

$\begin{cases} x = 2y \\ 2x = y \end{cases} \rightarrow A(0;0)$        $\begin{cases} x = 2y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \rightarrow B(5; 2,5)$

$\begin{cases} 2x = y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \rightarrow C(2; 4)$

Assim podemos calcular a área do triângulo

$S = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2,5 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{15}{2}$  unidades de área

**Questão 17.** Sejam  $A(a,0)$ ,  $B(0,a)$  e  $C(a,a)$ ; pontos do plano cartesiano, em que  $a$  é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos  $P(x,y)$  cuja distância à reta que passa por  $A$  e  $B$ , é igual à distância de  $P$  ao ponto  $C$ .

- a)  $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$
- b)  $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
- c)  $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
- d)  $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$
- e)  $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

**SOLUÇÃO: A**

De acordo com os pontos fornecidos  $A(a,0)$ ,  $B(0,a)$ ,  $C(a,a)$ , e considerando  $P(x,y)$  tem-se que:  $d_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}$

A reta  $r$  que passa por  $A$  e  $B$  é definida por:  $\begin{vmatrix} x_r & y_r & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow r: x_r + y_r - a = 0$

Logo a distância do ponto  $P$  à reta  $r$  é dada por:  $d_{Pr} = \frac{|1 \cdot x + 1 \cdot y - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$

E o lugar geométrico em questão é:

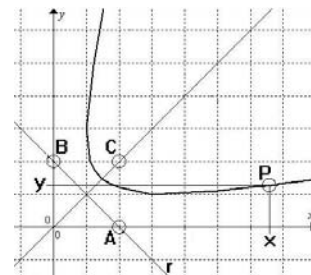
$d_{CP} = d_{Pr} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = \frac{|1 \cdot x + 1 \cdot y - a|}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{2(x-a)^2 + 2(y-a)^2} = |1 \cdot x + 1 \cdot y - a|$

$\Rightarrow 2(x-a)^2 + 2(y-a)^2 = (x+y-a)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

**Obs.:** Pela definição do problema observa-se que se trata de uma parábola. Como a reta em questão (diretriz) tem ângulo de  $-45^\circ$  o eixo da parábola se encontra rotacionado de  $-45^\circ$ , como pode ser observado no gráfico.

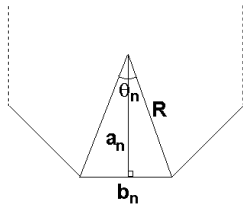


**Questão 18.** Seja  $P_n$  um polígono regular de  $n$  lados, com  $n > 2$ . Denote por  $a_n$  o apótema e por  $b_n$  o comprimento de um lado de  $P_n$ . O valor de  $n$  para o qual valem as desigualdades  $b_n \leq a_n$  e  $b_{n-1} > a_{n-1}$ , pertence ao intervalo

- a)  $3 < n < 7$ .
- b)  $6 < n < 9$ .
- c)  $8 < n < 11$ .
- d)  $10 < n < 13$ .
- e)  $12 < n < 15$ .

**SOLUÇÃO: B**

Sejam  $\theta_n$  (ângulo central de  $P_n$ ) e  $R$  (raio da circunferência circunscrita a  $P_n$ ), como na figura:



Do triângulo retângulo:

$$\frac{b_n/2}{a_n} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Das condições  $\frac{b_n}{a_n} \leq 1$  e  $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} > 1$ , temos:

$$2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \leq 1 \text{ e } 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n-1}\right) > 1$$

Para  $n = 6$  (hexágono):  $\frac{b_6}{a_6} = 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{6}\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} > 1$

Para  $n = 8$  (octógono):

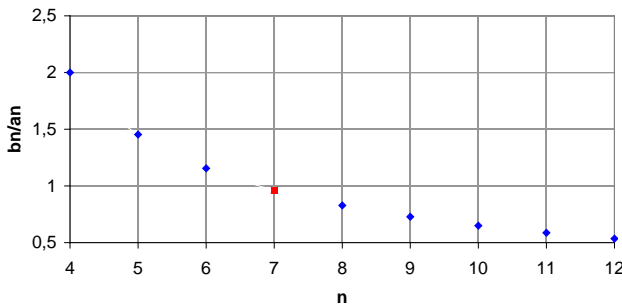
$$\frac{b_8}{a_8} = 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{8}\right) = 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$$

$$\frac{b_8}{a_8} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) < 1$$

Logo, pode-se concluir que  $n = 7$  ou  $8 \Rightarrow 6 < n < 9$

OBS.: Graficamente, ou numericamente, com auxílio de uma calculadora científica, é possível determinar que  $n = 7$ . ( $\frac{b_7}{a_7} \cong 0,96$ )

Razão entre lado e apótema versus número de lados de um polígono regular



**Questão 19.** Sejam  $P_1$  e  $P_2$  octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo está circunscrito a uma circunferência de raio  $R$ . Sendo  $A_1$  a área de  $P_1$  e  $A_2$  a área de  $P_2$ , então a razão  $\frac{A_1}{A_2}$  é igual a:

- a)  $\sqrt{\frac{5}{8}}$       b)  $9\sqrt{2}/16$       c)  $2(\sqrt{2}-1)$   
 d)  $(4\sqrt{2}+1)/8$       e)  $(2+\sqrt{2})/4$

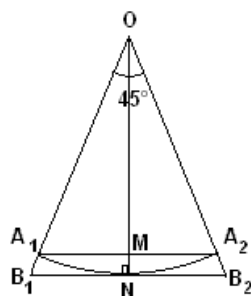
**SOLUÇÃO: E**

OM : apótema de  $P_1$   
 ON : apótema de  $P_2$

ON é raio da circunferência circunscrita a  $P_2 \Rightarrow ON = OA_2$

Como  $P_1$  e  $P_2$  são semelhantes:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{OM}{ON}\right)^2 = \left(\frac{OM}{OA_2}\right)^2 = \left[\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\right]^2$$

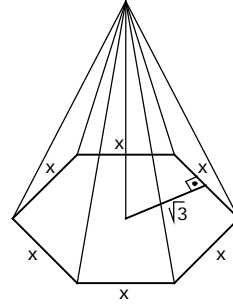


$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \left[\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}\right]^2 = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

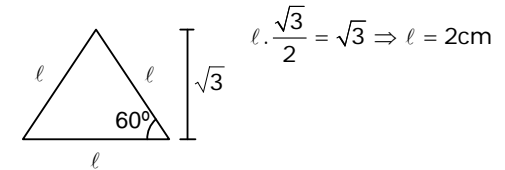
**Questão 20.** Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema de base mede  $\sqrt{3}$  cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a  $1 \text{ cm}^3$  e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é  $1/\sqrt{2}$ , a altura do tronco, em centímetros, é igual a

- a)  $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$       b)  $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/3$       c)  $(3\sqrt{3}-\sqrt{6})/21$   
 d)  $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})/6$       e)  $(2\sqrt{6}-\sqrt{2})/22$

**SOLUÇÃO: C**



Considerando uma circunferência circunscrita ao polígono da base da pirâmide regular, temos que:



Seja  $H_1$  a altura dessa pirâmide e  $V$  o seu volume, e  $H_2$  a altura da pirâmide obtida após o seccionamento, temos a seguinte relação:

$$\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3 = \frac{V-1}{V} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \Rightarrow \frac{V-1}{V} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$V(2\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$$

Como  $V$  pode ser dado por:

$$V = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot l^2 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \frac{1}{3} \cdot H_1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{3} \cdot H_1 \Rightarrow$$

$$H_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{2}-1)}$$

Ainda,  $\left(\frac{H_2}{H_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow H_2 = \frac{H_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{2}-1)}$ . A altura do tronco será então:

$$H = H_1 - H_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{6}+\sqrt{3})}{21} \Rightarrow$$

$$H = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21} \text{ cm}$$

**Questão 21.** Determine o conjunto  $C$ , sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos de números reais tais que

$$A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 2\}$$

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0\}$$

$$A \cap C = \{x \in \mathbb{R} : \log(x+4) \leq 0 + x \geq 2\}$$

$$B \cap C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2 \cdot x + 7 < 2\}$$

**SOLUÇÃO:**

O conjunto  $C$  pode ser dado por:

$$C = [(A \cup B \cup C) - (A \cup B)] \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Determinamos então cada conjunto do segundo membro:

$$A \cup B \cup C : x^2 + x \geq 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \text{ ou } x + \frac{1}{2} \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$A \cup B \cup C = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ ou } x \leq -2\}$$

$$A \cup B: 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{-2x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2^{3x}} - \frac{3}{2^{2x}} - \frac{4}{2^x} > 0 \Rightarrow$$

$$2^{-2x} - 3 \cdot 2^{-x} - 4 > 0. \text{ Seja } a = +2^{-x}, \text{ então}$$

$$a^2 - 3a - 4 > 0 \Rightarrow \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{25}{4} \Rightarrow a - \frac{3}{2} > \frac{5}{2} \text{ ou}$$

$$a - \frac{3}{2} < -\frac{5}{2} \Rightarrow a > 4 \text{ ou } a < -1; \text{ como}$$

$$a = 2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ então } 2^{-x} > 4 \Rightarrow 2^x < 2^{-2} \Rightarrow$$

$$x < -2. \therefore A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x < -2\}$$

$A \cap C$ :  $\log(x+4) \leq 0$ , com  $0 < x+4$ ; então temos que:

$$\log(x+4) \leq 0 \Rightarrow x+4 \leq 1 \Rightarrow x \leq -3, \text{ como } x > 4 > 0 \Rightarrow$$

$$-4 < x \leq -3. \therefore A \cap C: \{x \in \mathbb{R} / -4x \leq -3\}$$

$$B \cap C: 0 \leq 2x+7 < 2 \Rightarrow \frac{-7}{2} \leq x < \frac{-5}{2} \Rightarrow$$

$$B \cap C = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-7}{2} \leq x < \frac{-5}{2}\right\}$$

Chegamos então que

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leq \frac{-5}{2} \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x \geq 1\right\}$$

**Questão 22.** Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\bar{z}}{z-2i} + \frac{2 \cdot z}{\bar{z}+2i} = 3 \text{ e } 0 < |z-2i| \leq 1.$$

**SOLUÇÃO:**

Fazendo  $\frac{\bar{z}}{z-2i} = w$ , com  $z \neq 2i$ , temos:

$$w + 2\bar{w} = 3 \quad (I)$$

Seja  $w = a + bi$ . Logo, de (I):

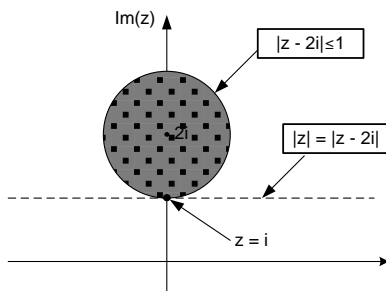
$$3a - bi = 3 \Leftrightarrow a = 1; b = 0 \Leftrightarrow w = 1$$

Assim,  $|w| = 1$  de onde:

$$\left|\frac{\bar{z}}{z-2i}\right| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z}| = |z-2i| \Leftrightarrow |z| = |z-2i|$$

A solução da última equação é a reta mediatriz dos pontos  $z = 0$  e  $z = 2i$ , ou seja, é conjunto dos pontos da forma  $z = x + i$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (II)

Já o conjunto de pontos que satisfaz  $0 < |z-2i| \leq 1$  (III) é o círculo de centro no ponto  $z = 2i$  e raio 1, excluindo-se o próprio centro do círculo.



A intersecção entre (II) e (III) dá  $z = i$ , que é a única solução do sistema.

**Questão 23.** Seja k um número inteiro positivo e  $A_k = \{j \in \mathbb{N} : j \leq k \text{ e } \text{mdc}(j,k) = 1\}$ . Verifique se  $n(A_3)$ ,  $n(A_9)$ ,  $n(A_{27})$  e  $n(A_{81})$ , estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

**SOLUÇÃO:**

$A_3 = \{j \in \mathbb{N} : j \leq 3 \text{ e } \text{mdc}(3,k) = 1\}$ , ou seja  $A_3$  é o conjunto de todos os naturais j menores que 3 tais que j e 3 são primos entre si. Logo  $A_3 = \{1,2\}$  e  $n(A_3) = 2$

$A_9 = \{j \in \mathbb{N} : j \leq 9 \text{ e } \text{mdc}(9,k) = 1\}$ , ou seja  $A_9$  é o conjunto de todos os naturais j menores que 9 tais que j e 9 são primos entre si. Logo  $A_9 = \{1,2,4,5,7,8\}$  e  $n(A_9) = 6$ . Note que como  $9 = 3^2$ , basta que j não seja

múltiplo de 3 para que a condição seja atendida. De 1 a 9, 2/3 dos números não são múltiplos de 3, logo  $A_9$  tem 6 elementos (2/3 de 9) Como  $27 = 3^3$ , vale a analogia e  $A_{27}$  terá 2/3 de  $27 = 18$  elementos. Inferimos também que  $A_{81}$  terá 2/3 de  $81 = 54$  elementos. A sucessão (2, 6, 18, 54) caracteriza uma PG de razão  $q = 3$ .

**Questão 24.** Considere a equação:  $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ .

- Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?
- Determine todas essas raízes reais.

**SOLUÇÃO:**

a) Para que as raízes quadradas pertençam aos reais, temos duas condições:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \text{ e } x^2 - p \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq p$$

A partir da equação inicial:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 - p}\right)^2 = \left(x - 2\sqrt{x^2 - 1}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2 - 1} + 4x^2 - 4$$

$$\Rightarrow 4x\sqrt{x^2 - 1} = p + 4x^2 - 4 \Rightarrow \left(4x\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 = \left(p + 4x^2 - 4\right)^2$$

$$\Rightarrow 16x^4 - 16x^2 = p^2 + 16x^4 + 16 + 8px^2 - 8p - 32x^2$$

$$\Rightarrow (16 - 8p)x^2 - p^2 - 16 + 8p = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{8p - p^2 - 16}{8p - 16} = \frac{-(p-4)^2}{8(p-2)} = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)}$$

Da condição  $x^2 \geq p$ , temos

$$\frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \geq p \Rightarrow \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} - p \geq 0 \Rightarrow \frac{9p^2 - 24p + 16}{16 - 8p} \geq 0$$

Considerando apenas o numerador e igualando-o a zero, temos:

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 0$$

Logo, para qualquer valor real de p temos que  $9p^2 - 24p + 16 \geq 0$  e assume

valor nulo em  $p = \frac{24 \pm 0}{18} = \frac{4}{3}$ . Assim, como o numerador sempre é não-

negativo, segue que  $16 - 8p > 0 \Rightarrow p < 2$

Como a equação do enunciado deve ser satisfeita:

$$\left(\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 = x^2:$$

$$(x^2 - p) + 4(x^2 - 1) + 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = x^2$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = p - 4x^2 + 4$$

Como a raiz deve existir, segue que  $p - 4x^2 + 4 \geq 0$ .

$$\Rightarrow x^2 \leq \frac{p+4}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \leq \frac{p+4}{4} \Rightarrow \frac{p^2 - 8p + 16}{2(2-p)} - p - 4 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p^2 - 8p + 16 - (4-2p)(p+4)}{4-2p} \leq 0$$

Como  $4 - 2p > 0$  (pois  $p < 2$ ), temos:

$$p^2 - 8p + 16 - 4p - 16 + 2p^2 + 8p \leq 0 \Rightarrow 3p^2 - 4p \leq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq \frac{4}{3}$$

$$b) \text{ Se } 0 \leq p \leq \frac{4}{3}, \text{ temos então: } x^2 = \frac{(p-4)^2}{8(2-p)} \Rightarrow x = \frac{|p-4|}{2\sqrt{4-2p}} = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

**Questão 25.** Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} \log(x+2y) \cdot (w-3z)^{-1} = 0, \\ 2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} = 0, \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} - 2 = 0. \end{cases}$$

**SOLUÇÃO:**

$$\begin{cases} \log[(x+2y)(w-3z)^{-1}] = 0 \Rightarrow [(x+2y)(w-3z)^{-1}] = 1 \Rightarrow \\ 2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} = 0 \Rightarrow 2^{x+3z} - 2^{y-3z+w+3} = 0 \Rightarrow \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} = 2 \Rightarrow \\ \begin{cases} x+2y = w-3z \Rightarrow x+2y+3z-w = 0 \text{ (i)} \\ x+3z = y-3z+w+3 \Rightarrow x-y+6z-w = 3 \text{ (ii)} \\ 2x+y+6z-2w = 8 \text{ (iii)} \end{cases} \end{cases}$$

Deve-se notar que  $w - 3z \neq 0$ , ou seja  $w \neq 3z$   
Fazendo-se a combinação linear (iv) = (i)+(ii)-(iii), obtém-se:

$$3z = -5 \Rightarrow z = -\frac{5}{3}$$

Substituindo o valor de z nas equações, tem-se:

$$\begin{cases} x+2y-w = 5 \text{ (i)} \\ x-y-w = 13 \text{ (ii)} \\ 2x+y-2w = 18 \text{ (iii)} \end{cases}$$

Fazendo agora a combinação linear (v) = (i)-(ii), encontra-se:

$$3y = -8 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}$$

Substituindo o valor de y nas expressões acima, obtém-se:

$$x-w = \frac{31}{3} \Rightarrow w = x - \frac{31}{3};$$

$$w \neq 3z = -5 \Rightarrow x \neq -\frac{16}{3}$$

O conjunto solução do sistema é dado por:  $(x;y;z;w)$

$$S = \left\{ \left( x; -\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}; x - \frac{31}{3} \right), x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{16}{3} \right\} \right\}$$

**Questão 26.** Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

**SOLUÇÃO:**

Comissão com 5 pessoas com pelo menos uma moça e um rapaz. Logo, o que não poderá ocorrer é escolher 5 pessoas em que não haja nenhum homem ou nenhuma mulher.

Escolha de 5 pessoas quaisquer, independente do sexo:

$$C_{9,5} = \frac{9!}{5! 4!} = 126$$

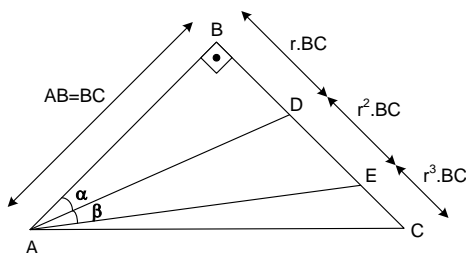
Escolha de 5 pessoas do mesmo sexo,

Como temos apenas 4 mulheres, não será possível formar comissões apenas com mulheres, logo há apenas uma comissão com 5 homens.

Portanto, temos  $126 - 1$ , ou seja, **125** comissões com pelo menos um homem e uma mulher.

**Questão 27.** Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado BC, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos BC, BD, DE, EC, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se  $\beta$  for o ângulo EAD, determine  $\text{tg } \beta$  em função da razão r da progressão.

**SOLUÇÃO:**



O triângulo ABC é isósceles, ou seja,  $AB=BC$ . Da figura acima, temos:

$$\text{tg } \alpha = r$$

$$\text{tg } (\alpha + \beta) = r + r^2$$

$$r + r^2 + r^3 = 1$$

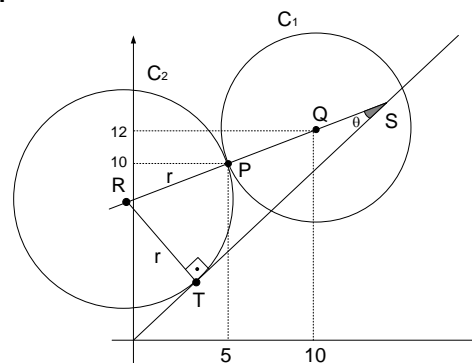
Como desejamos encontrar  $\text{tg } \beta$ , basta fazermos:

$$\text{tg } \beta = \text{tg}(\alpha + \beta - \alpha) = \frac{\text{tg}(\alpha + \beta) - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg}(\alpha + \beta) \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{r + r^2 - r}{1 + r \cdot (r + r^2)}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{r^2}{1 + r^2 + r^3} \text{ ou } \frac{r^2}{2 - r}$$

**Questão 28.** Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , que se tangenciam exteriormente em  $P : (5;10)$ . O ponto  $Q : (10;12)$  é o centro de  $C_1$ . Determine o raio da circunferência  $C_2$ , sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação  $x = y$ .

**SOLUÇÃO:**



Sejam R e T, respectivamente, o centro de  $C_2$  e o ponto de tangência entre  $x - y = 0$  e  $C_2$ . Por condição de tangência, devemos ter Q, P e R alinhados.

Determinemos a equação da reta PQ, que tem coeficiente angular igual

$$a = \frac{12 - 10}{10 - 5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{PQ: } y - 12 = \frac{2}{5}(x - 10) \Leftrightarrow 2x - 5y = -40$$

Encontraremos o ponto S, intersecção da reta  $x - y = 0$  e da reta PQ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 5y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -40 \\ -3y = -40 \end{cases} \Leftrightarrow S = \left( \frac{40}{3}, \frac{40}{3} \right)$$

$$\text{Assim, } PS = \sqrt{\left( \frac{40}{3} - 5 \right)^2 + \left( \frac{40}{3} - 10 \right)^2} = \sqrt{\frac{725}{9}} = \frac{5\sqrt{29}}{3}$$

Sendo  $\theta$  o ângulo agudo entre PQ e  $y = x$ , temos:

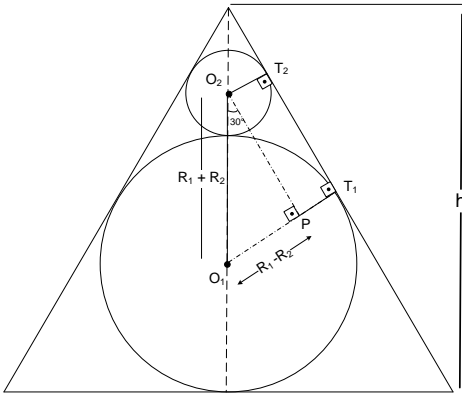
$$\text{tg } \theta = \frac{\left| 1 - \frac{2}{5} \right|}{\left| 1 + 1 \cdot \frac{2}{5} \right|} = \frac{3}{7} \rightarrow \text{sen } \theta = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

Chamamos de r o raio de  $C_2$ . No triângulo STR, temos:

$$\frac{RT}{RS} = \text{sen } \theta \Leftrightarrow \frac{r}{r + \frac{5\sqrt{29}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{58}} \Rightarrow r = \frac{145\sqrt{2} + 15\sqrt{29}}{49}$$

**Questão 29.** Seja  $C_1$  uma circunferência de raio  $R_1$  inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja  $C_2$  uma segunda circunferência, de raio  $R_2$ , que tangencia dois lados do triângulo internamente e  $C_1$  externamente. Calcule  $(R_1 - R_2)/h$ .

**SOLUÇÃO:**



Sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros das circunferências temos:  
 $O_1T_1 = R_1$  e  $O_2T_2 = R_2$

$$\sin 30^\circ = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_1 = 3R_2$$

Como se trata de um triângulo equilátero, então  $h = 3R_1$

Logo:

$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{R_1 - \frac{R_1}{3}}{3R_1} = \frac{2}{9}$$

**Questão 30.** Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume  $\frac{8}{3}$   $\text{cm}^3$ , encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é

centro de uma esfera de 1cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

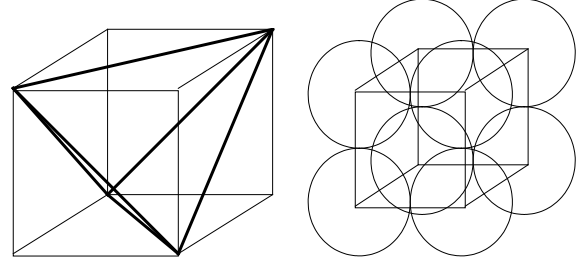
**SOLUÇÃO:**

Seja  $b$  a aresta do tetraedro, então  $\frac{8}{3} = \frac{b^3 \sqrt{2}}{12} \rightarrow b = 2\sqrt{2}$

Note a aresta do tetraedro é a diagonal de face de um cubo de aresta  $a$ .

Assim  $2\sqrt{2} = a\sqrt{2}$  e  $a = 2$  cm

Como as esferas tem raio igual a 1 elas se tangenciam conforme a figura abaixo, não havendo área comum a duas esferas quaisquer.



Notamos que  $\frac{1}{8}$  de cada esfera fica interna ao cubo.

Assim, o volume da parte do cubo exterior às esferas vale

$$2^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \frac{4}{3} \pi 1^3 = 8 - \frac{4}{3} \pi \text{ cm}^3$$