MATEMÁTICA

01. Sabe-se que:

$a=[a]+\{a\}, \forall a \in IR$, onde $[a]$ é a parte inteira de a

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=4,2 \\ y+[z]+\{x\}=3,6 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$$, com $x, y\ e\ z \in IR$

Determine o valor de $x-y+z$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 01

Somando as três equações, membro a membro, temos:

$$x+[x]+\{x\}+y+[y]+\{y\}+z+[z]+\{z\}=4{,}2+3{,}6+2=9{,}8$$

Como $a=[a]+\{a\}$:

$$2\cdot(x+y+z)=9{,}8 \Rightarrow x+y+z=4{,}9$$

Subtraindo sucessivamente esta equação da primeira, da segunda e da terceira e lembrando de que $a=[a]+\{a\}$, vem que:

$$\underbrace{y-[y]}_{\{y\}}+\underbrace{z-\{z\}}_{[z]}=0{,}7 \Rightarrow \{y\}+[z]=0{,}7 \Rightarrow \begin{cases}[z]=0\\ \{y\}=0{,}7\end{cases}$$

$$\underbrace{z-[z]}_{\{z\}}+\underbrace{x-\{x\}}_{[x]}=1{,}3 \Rightarrow \{z\}+[x]=1{,}3 \Rightarrow \begin{cases}[x]=1\\ \{z\}=0{,}3\end{cases}$$

$$\underbrace{x-[x]}_{\{x\}}+\underbrace{y-\{y\}}_{[y]}=2{,}9 \Rightarrow \{x\}+[y]=2{,}9 \Rightarrow \begin{cases}[y]=2\\ \{x\}=0{,}9\end{cases}$$

Assim, determinamos *x*, *y* e *z*:

$$\begin{cases} x=[x]+\{x\}=1+0{,}9=1{,}9 \\ y=[y]+\{y\}=2+0{,}7=2{,}7 \\ z=[z]+\{z\}=0+0{,}3=0{,}3 \end{cases}$$

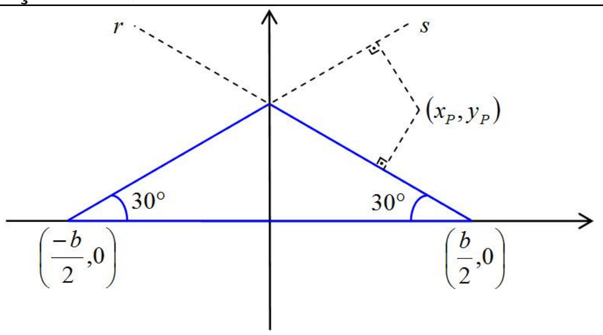
Conseqüentemente:

$$x-y+z=1{,}9-2{,}7+0{,}3 \Rightarrow \boxed{x-y+z=-0{,}5}$$

02. Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B , sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seu ângulo oposto $\hat{B}=120°$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias as outras duas retas que suportam os dois outros lados.

Determine a(s) equação(ões) do lugar geométrico e identifique a(s) curva(s) descrita(s).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 02



Sejam r e s as retas suporte dos lados congruentes do triângulo e $P=(x_P, y_P)$ um ponto genérico do lugar geométrico procurado, como na figura acima. Temos, pois:

Equação de *r*:

$$y-0=\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{b}{2}\right) \Rightarrow y+\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{b\sqrt{3}}{6}=0$$

Equação de *s*:

$$y-0=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{b}{2}\right) \Rightarrow y-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{b\sqrt{3}}{6}=0$$

Distância de *P* a *r*:

$$d_r=\frac{\left|y_P+\frac{\sqrt{3}}{3}x_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left|y_P+\frac{\sqrt{3}}{3}x_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right|$$

Distância de *P* a *s*:

$$d_s=\frac{\left|y_P-\frac{\sqrt{3}}{3}x_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left|y_P-\frac{\sqrt{3}}{3}x_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right|$$

Distância de *P* à reta suporte da base do triângulo: y_P

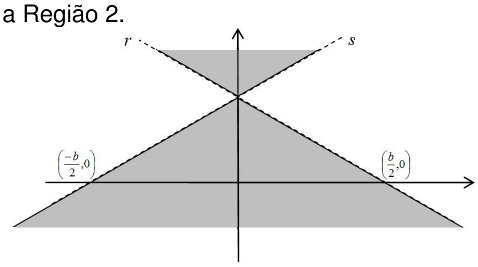
Então, do enunciado:

$$(y_P)^2=d_r\cdot d_s \Rightarrow y_P^2=\frac{3}{4}\cdot\left|\left(y_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_P\right)^2\right| \quad (i)$$

Consideremos a Região 1 aquela porção do plano em que $\left(y_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_P\right)^2\geq 0$ e a Região 2 aquela em que $\left(y_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_P\right)^2\leq 0$.

É fácil notar que trata-se de regiões delimitadas por *r* e *s*, formando uma partição do plano (exceto por suas interseções, que são as próprias retas *r* e *s*).

Na figura abaixo temos estas regiões indicadas. A região sombreada é a Região 1, enquanto a região não sombreada (em branco) é a Região 2.



Para a Região 1 o lugar geométrico encontrado em *(i)* se torna:

$$y_P^2=\frac{3}{4}\cdot\left[\left(y_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_P\right)^2\right] \Rightarrow y_P^2=\frac{3}{4}\cdot\left(y_P^2-\frac{b\sqrt{3}}{3}y_P+\frac{b^2}{12}-\frac{x_P^2}{3}\right)$$

$x_P^2+\left(y_P+\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2=b^2$, ou seja, uma circunferência de centro $\left(0,\frac{-b\sqrt{3}}{2}\right)$ e raio *b*.

Para a Região 2 obtemos mais uma expressão do LG procurado:

$$y_P^2=\frac{-3}{4}\cdot\left[\left(y_P-\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_P\right)^2\right] \Rightarrow y_P^2=\frac{-3}{4}\cdot\left(y_P^2-\frac{b\sqrt{3}}{3}y_P+\frac{b^2}{12}-\frac{x_P^2}{3}\right)$$

$\frac{x_P^2}{\left(b/\sqrt{7}\right)^2}-\frac{\left(y_P-b\sqrt{3}/14\right)^2}{\left(b/7\right)^2}=1$, o que representa uma hipérbole de centro $\left(0,b\sqrt{3}/14\right)$, eixo real horizontal com medida $2b\sqrt{7}/7$ e eixo imaginário com medida $2b/7$.

03. Sabe-se que $z_1\,\overline{z_2} = \dfrac{z_3}{z_4}$ e $|z_3+z_4| - |z_3-z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero.
Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.
Obs.: números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de z.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 03

A equação $|z_3 - (-z_4)| = |z_3 - z_4|$ indica que:

1º) z_3 equidista de z_4 e de $-z_4$;

2º) z_3 pertence à mediatriz do segmento de extremos z_4 e $-z_4$;

3º) z_3 é ortogonal a z_4;

4º) $\dfrac{z_3}{z_4} = r\ \text{cis}\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Portanto

$$z_1\overline{z_2} = \frac{z_1 z_2 \overline{z_2}}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}|z_2|^2 = r\ \text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{|z_2|^2}\text{cis}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

z_1 é ortogonal a z_2.

04. Dada a função F:IN² $\longrightarrow$ IN, com as seguintes características:
F(0,0) = 1;
F(n,m+1) = q.F(n,m), onde q é um número real diferente de zero;
F(n+1, 0) = r + F(n,0), onde r é um número real diferente de zero.

Determine o valor de $\sum_{i=0}^{2009} F(i,i)$, i ∈ IN.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 04

De acordo com o enunciado, temos:

$F(1,0) = r + F(0,0) = r+1$

$F(2,0) = r + F(1,0) = 2r+1$

$F(3,0) = r + F(2,0) = 3r+1$

Por indução, conclui-se que: $\boxed{F(n,0) = n.r+1}$ (1)

Por outro lado, temos:

$F(1,1) = q.F(1,0) = q.(r+1)$

$F(2,2) = q.F(2,1) = q^2.F(2,0) = q^2.(2r+1)$

$F(3,3) = q.F(3,2) = q^2.F(3,1) = q^3.F(3,0) = q^3.(3r+1)$

Novamente, por indução, conclui-se que:

$\boxed{F(n,n) = q^n.(n.r+1)}$ (2)

Denotemos por S, a soma desejada. Desta forma, temos:

$$S = \sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = 1 + q(r+1) + q^2(2r+1) + ... + q^{2009}(2009r+1) \quad (3)$$

Multiplicando ambos os membros de (3) por q, temos:

$$qS = q + q^2(r+1) + q^3(2r+1) + ... + q^{2010}(2009r+1) \quad (4)$$

Subtraindo a equação (4) da equação (3), temos:

$$S(1-q) = 1 + qr + q^2r + q^3r + ... + q^{2009}r - q^{2010}(2009.r+1) \quad (5)$$

Observando a equação (5), temos que:

$$qr + q^2r + q^3r + ... + q^{2009}r = qr.\frac{\left(q^{2009}-1\right)}{q-1} \quad (6)$$

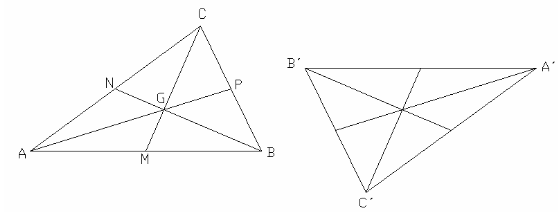
Substituindo (6) em (5), chega-se a:

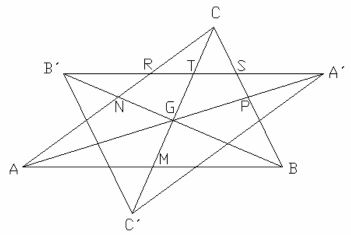
$$S(1-q) = 1 - q^{2010}(2009.r+1) + qr.\frac{\left(q^{2009}-1\right)}{q-1}.$$

Portanto: $\boxed{S = \dfrac{q^{2010}(2009.r+1)-1}{q-1} - qr.\dfrac{\left(q^{2009}-1\right)}{(q-1)^2}}$

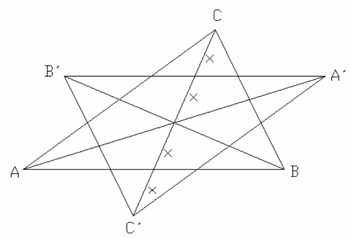
05. Seja G o ponto de interseção das medianas de um triângulo ABC com área S. Considere os pontos A', B' e C' obtidos por uma rotação de 180° dos pontos A, B e C, respectivamente em torno de G. Determine, em função de S, a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e A'B'C'.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 05

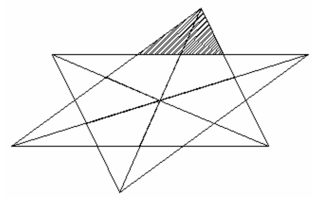




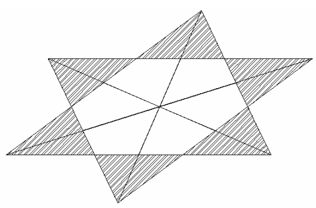
G é baricentro do ΔABC, logo CG = 2MG. Arbitrando MG = x, temos CG = 2x
Com a rotação G também é baricentro do ΔA'B'C' e C'G=2x, seguindo que C´M = x
Deste modo temos que os Δs ABG e A'B'G sãs congruentes (LLL).
Como GÂB = GÂ'B' temos que A'B' e AB são paralelos.



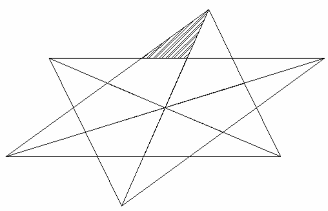
Assim ΔABC~ΔRSC e a razão de semelhança é MC/TC=3x/x=3.
Então a área do ΔRSC é $(1/3)^2$ da área do ΔABC. $S_{\Delta RSC} = S/9$



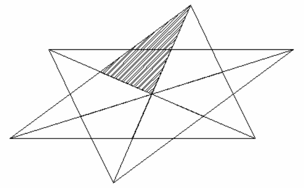
Por analogia, as áreas dos pequenos triângulos da figura também valem S/9. Portanto, a aréa total dos triângulos é 6.S/9 = 2S/3



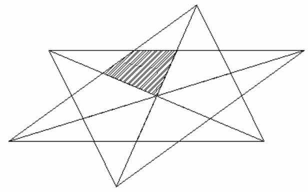
Da semelhança também percebemos que se M é médio de AB então T é médio de RS.
Assim $S_{\Delta RTC} = S_{\Delta TSC} = (S/9)/2 = S/18$.



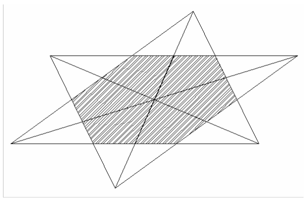
Voltando ao ΔABC, sabemos que $S_{\Delta CNG} = S/6$



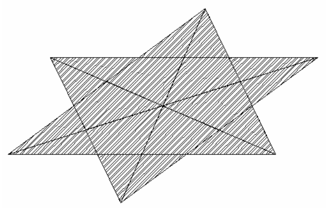
Deste modo $S_{GTRN} = S_{\Delta CNG} - S_{\Delta RTC} = S/6 - S/18 = 2S/18 = S/9$



Concluímos então, por analogia, que todas as áreas dos pequenos quadriláteros da figura também valem S/9. Logo, a aréa total dos quadriláteros vale 6.S/9 = 2S/3



Então a área pedida vale 2S/3 + 2S/3 = <u>4S/3</u>.



06. Resolva a seguinte inequação, para $0 \le x < 2\pi$:

$$\frac{3sen^2x + 2\cos^2 x + 4senx - (1+4\sqrt{2})senx\cos x + 4\cos x - (2+2\sqrt{2})}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 06

Rearranjando os termos do numerador, temos:

$$\frac{(3sen^2x + 2\cos^2 x - senx\cos x - 2) + 2.(2senx - 2\sqrt{2}.senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2})}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

Logo temos:

$$\frac{3sen^2x + 2\cos^2 x - senx\cos x - 2}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} + 2 > 2$$

$$\frac{3sen^2x + 2\cos^2 x - senx\cos x - 2}{2senx - 2\sqrt{2}senx\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{sen^2x + 2 - senx\cos x - 2}{2senx\left(1-\sqrt{2}\cos x\right) - \sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} > 0$$

$$\frac{senx\left(senx - \cos x\right)}{\left(2senx - \sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)} > 0$$

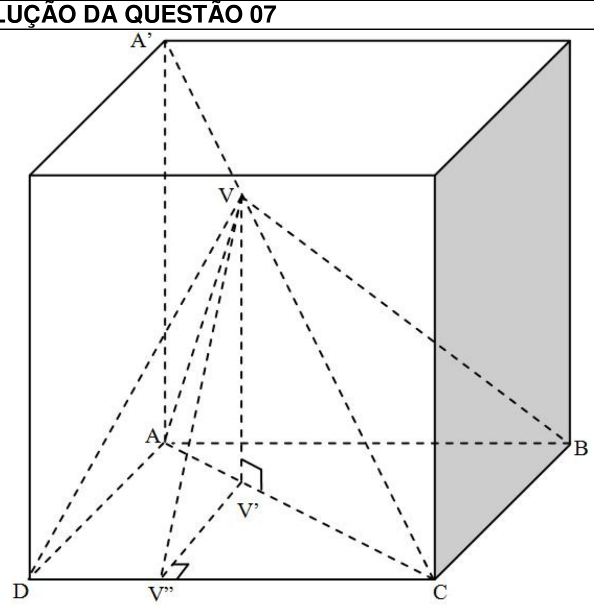
$$\frac{senx \cdot \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}{2\sqrt{2}\left(senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)} > 0$$

$$\frac{senx \cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\left(senx - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\right)} > 0$$

07. Seja um cubo de base ABCD com aresta *a*. No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide VABCD. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide VABCD, em função de *a*, sabendo que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2 sendo *k* um número primo.

Obs.: as arestas laterais da pirâmide são VA, VB, VC e VD.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 07



Sejam A, B, C, D e V os pontos descritos no enunciado, e ainda A', V' e V" pontos auxiliares, conforme a figura.
V" é, por construção, aquele que torna V'V" e DC perpendiculares.
Temos também que VV' = *h*.
Achemos os demais segmentos:
VC:

$$\Delta VV'C \sim \Delta A'AC \Rightarrow \frac{VV'}{A'A} = \frac{VC}{A'C} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{VC}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{VC = h\sqrt{3}}$$

V'C:

$$(VV')^2 + (V'C)^2 = (VC)^2 \Rightarrow h^2 + (V'C)^2 = \left(h\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow V'C = h\sqrt{2}$$

VA:

$$(VA)^2 = (V'A)^2 + (VV')^2 \Rightarrow (VA)^2 = \left(a\sqrt{2} - h\sqrt{2}\right)^2 + h^2$$

$$\Rightarrow (VA)^2 = 2a^2 - 4ah + 3h^2$$

V"C e V'V":

Catetos de um Δ retângulo e isósceles de hipotenusa

$$V'C = h\sqrt{2} \Rightarrow V''C = V'V'' = h$$

VV":

Hipotenusa de um Δ retângulo de catetos

$$VV' = V'V'' = h \Rightarrow VV'' = h\sqrt{2}$$

VD:

$$(VD)^2 = (V''D)^2 + (VV'')^2 \Rightarrow (VD)^2 = (a-h)^2 + \left(h\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (VD)^2 = a^2 - 2ah + 3h^2$$

VB:

Pela simetria do problema é fácil ver que ele é igual a VD.

Agora achamos os valores possíveis de *k*, de acordo com o enunciado:

$$(VA)^2 + (VB)^2 + (VC)^2 + (VD)^2 = ka^2$$

$$\left(2a^2 - 4ah + 3h^2\right) + \left(a^2 - 2ah + 3h^2\right) + \left(3h^2\right) + \left(a^2 - 2ah +\right.$$

$$12h^2 - 8ah + a^2(4-k) = 0$$

$$h = \frac{2a \pm a\sqrt{3k-8}}{6} \quad (i)$$

Sabendo que *k* é primo, que $0 < h < a$ e que $3k - 8 \geq 0$ obtemos todos os valores possíveis para *h*:

$$k = 3 \Rightarrow h = \frac{a}{2} \text{ ou } h = \frac{a}{6}$$

$$k = 5 \Rightarrow h = \frac{a}{6} \cdot \left(2 + \sqrt{7}\right)$$

$$k = 7 \Rightarrow h = \frac{a}{6} \cdot \left(2 + \sqrt{13}\right)$$

08. Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma $a_{in} = -\binom{n}{n-i+1}$
- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, aij = 1 para i- j= 1;
- todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e det(M) o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação det(xI - A) = 0 .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 08

Do enunciado:

$$(xI - A)_{nxn} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & 0 & & \binom{n}{n-2} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x + \binom{n}{1} \end{bmatrix}$$

Então, aplicando Laplace na última coluna, temos:

$$\det(xI - A) = (-1)^{1+n} \cdot \binom{n}{n} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & & 0 \\ & -1 & \cdots & \\ & \vdots & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{i+n} \cdot \binom{n}{n-i+1} \cdot \begin{vmatrix} x & & & 0 \\ -1 & x & \cdots & \\ & \vdots & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{2n} \cdot \left[x + \binom{n}{1}\right] \cdot \begin{vmatrix} x & & & 0 \\ -1 & x & \cdots & \\ & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\det(xI - A) = (-1)^{1+n} \cdot \binom{n}{n} \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^{i+n} \cdot \binom{n}{n-i+1} \cdot x^{i-1} \cdot (-1)^{n-i} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{2n} \cdot \left[x + \binom{n}{1}\right] \cdot x^{n-1}$$

$$\det(xI - A) = 1 + \binom{n}{n-i+1} \cdot x^{i-1} + \ldots + n \cdot x^{n-1} + x \cdot x^{n-1}$$

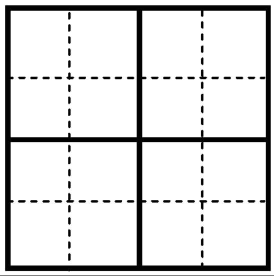
$$\det(xI - A) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = (x+1)^n$$

A equação pedida é $\det(xI - A) = 0$, então:

$$\det(xI - A) = (x+1)^n = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

09. . A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO 09

Há 4! = 24 maneiras de preencher o quadrado A com os números 1, 2, 3, 4. Feito isso, vamos agora preencher o quadrado D. Colocamos o número 1 em qualquer posição do quadrado D (4 maneiras). Depois disso, teremos uma situação como a seguinte:

A	B
C	D

1	2		
3	4		x
		c	a
	y	b	1

Agora, o número a não pode ser 2, pois ficaríamos sem opção para x, e o número b não pode ser 3, pois ficaríamos sem opção para y. Assim, nosso próximo passo é escolher o valor de c entre os números 2, 3 e 4, o que determina imediatamente a e b devido às restrições que acabamos de observar. É fácil ver que, para as demais posições do número 1 em D, obtemos uma situação análoga. Logo há 4 × 3 = 12 maneiras de completar o quadrado D depois de preenchido o A.
Feito isso, todos os espaços que sobraram têm uma única maneira de serem preenchidos. Assim, o número total de maneiras de preencher os quadrados é 24 × 12 = <u>288</u>.

10. Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação $\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2+x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2+x^2}}=2\sqrt{2}x$, para $x\in IR$ e $0\le x\le a$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 10

Desenvolvendo a equação dada, temos:

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}\sqrt{a+a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$a\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\sqrt{3}a\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=2\sqrt{2}x\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{x}{a}$$

Agora, como $0\le x\le a$, dividindo toda essa desigualdade por $a>0$ temos $0\le\frac{x}{a}\le 1$. Assim, para cada $a\ge x$, existe um único $\theta\in IR$, com $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, para o qual $\frac{x}{a}=\operatorname{sen}\theta$.

Como $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, vale que $\cos\theta\ge 0$. Portanto:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$$

A equação fica reduzida a:

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos\theta}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\cos\theta}=\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\theta$$

Utilizando as relações de arco duplo, temos:

$$\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1=1-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}1+\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\1-\cos\theta=2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

Como $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\ge 0\\\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ge 0\end{cases}$, temos: